

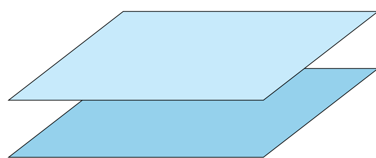
2 Graniastosłupy i ostrosłupy

Piramidy w Gizie zbudowano na przełomie XXVI i XXV w. p.n.e. Największa z nich – piramida Cheopsa (po lewej na zdjęciu) – miała około 146 m wysokości, a jej podstawą był kwadrat o boku 230 m. Aby obliczyć objętość piramidy, korzystamy ze wzoru na objętość ostrosłupa $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$, gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością. Objętość piramidy Cheopsa wynosiła około 2 600 000 m^3. Obecnie jej wymiary są nieco mniejsze.

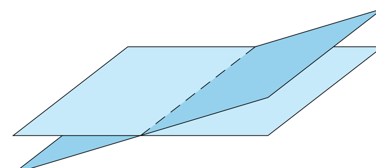
Uczeń:
- wskazuje w wielościanie proste prostopadłe, równoległe i skośne,
- wskazuje w wielościanie rzut prostokątny danego odcinka na daną płaszczyznę,
- przeprowadza wnioskowania dotyczące położenia prostych w przestrzeni,
- przeprowadza dowód twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny.

2.1. Proste i płaszczyzny w przestrzeni

Wzajemne położenie dwóch płaszczyzn



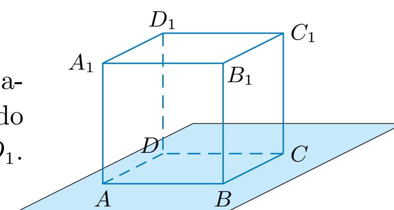
Płaszczyzny **równoległe** – nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Płaszczyzny **przecinające się** – ich częścią wspólną jest prosta.

Przykład 1

W sześcianie (rysunek obok) płaszczyzna zawierająca podstawę $ABCD$ jest równoległa do płaszczyzny zawierającej podstawę $A_1B_1C_1D_1$.



Ćwiczenie 1

Wskaż ścianę sześcianu (rysunek powyżej) zawartą w płaszczyźnie równoległej do płaszczyzny zawierającej ścianę: a) ADD_1A_1, b) DCC_1D_1.

Ćwiczenie 1
a) BCC_1B_1 b) ABB_1A_1

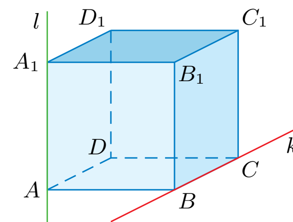
Zauważmy, że aby opisać płaszczyznę, wystarczy podać trzy niewspółliniowe punkty należące do niej, gdyż przez każde trzy punkty nieleżące na jednej prostej przechodzi dokładnie jedna płaszczyzna.

Ćwiczenie 2

Do płaszczyzn $\mathcal{P}_1$, $\mathcal{P}_2$, $\mathcal{P}_3$, $\mathcal{P}_4$ należą wymienione wierzchołki sześcianu (rysunek poniżej).

$\mathcal{P}_1: A, D, D_1$ $\mathcal{P}_2: A, B, D$

$\mathcal{P}_3: B, B_1, C_1$ $\mathcal{P}_4: B, B_1, A_1$



Które z tych płaszczyzn przecinają się wzdłuż prostej l, a które – wzdłuż prostej k?

Ćwiczenie 2
Wzdłuż prostej l przecinają się płaszczyzny $\mathcal{P}_1$ i $\mathcal{P}_4$.
Wzdłuż prostej k przecinają się płaszczyzny $\mathcal{P}_2$ i $\mathcal{P}_3$.

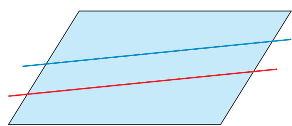
Ćwiczenie 3

Ściany sześcianu są zawarte w sześciu różnych płaszczyznach. Wskaż dowolne trzy wierzchołki sześcianu (rysunek powyżej) należące do płaszczyzny przecinającej te sześć płaszczyzn.

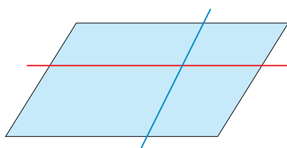
Uwaga. Dla figur na płaszczyźnie w przestrzeni prawdziwe są wszystkie twierdzenia przyjęte w planimetrii.

Ćwiczenie 3
Przykładowa odpowiedź: A, B_1, C_1

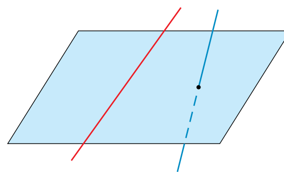
Wzajemne położenie dwóch prostych



Proste **równoległe** leżą w jednej płaszczyźnie i nie mają punktów wspólnych lub się pokrywają.



Proste **przecinające się** leżą w jednej płaszczyźnie i mają jeden punkt wspólny.

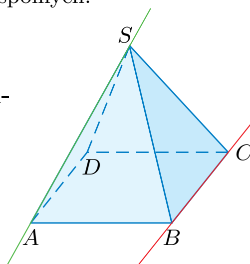


Proste **skośne** nie leżą w jednej płaszczyźnie, zatem nie mają punktów wspólnych.

Przykład 2

Na rysunku obok przedstawiono ostrosłup, którego podstawą jest kwadrat.

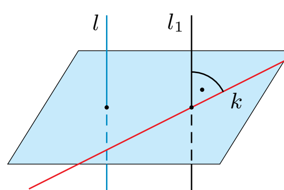
- Proste zawierające krawędzie AB i DC są równoległe.
- Proste zawierające krawędzie AS i BC są skośne.



Ćwiczenie 4

Które krawędzie ostrosłupa (rysunek powyżej) zawierają się w prostych skośnych do prostej zawierającej krawędź AB?

Mówimy, że prosta l, skośna do prostej k, jest do prostej k **prostopadła**, gdy istnieje prosta l_1 równoległa do prostej l i przecinająca prostą k pod kątem prostym.
Zauważmy, że każda prosta równoległa do prostej l_1 jest prostopadła do prostej k.



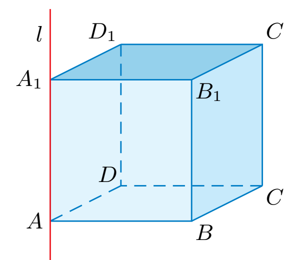
Uwaga. Proste prostopadłe są skośne lub się przecinają (gdy leżą w jednej płaszczyźnie).

Ćwiczenie 5

Prosta l zawiera krawędź AA_1 sześcianu (rysunek obok). Wskaż proste zawierające pozostałe krawędzie tego sześcianu, które są:

a) równoległe do prostej l,

b) prostopadłe do prostej l.



Ćwiczenie 6

W sześcianie (rysunek powyżej) wskaż pary wierzchołków, które wyznaczają proste skośne nieprostopadłe do prostej l.

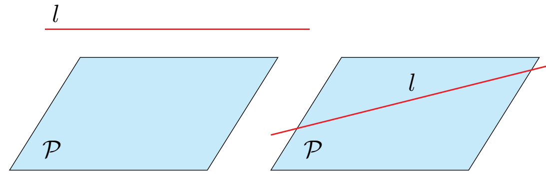
Ćwiczenie 4
SC, SD

Ćwiczenie 5
a) BB_1, CC_1, DD_1
b) AB, BC, CD, AD, A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, A_1D_1

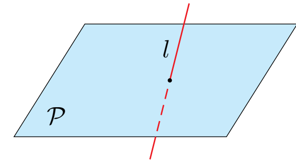
Ćwiczenie 6
B i C_1, B i D_1, C i B_1, C i D_1, D i B_1, D i C_1

Wzajemne położenie prostej i płaszczyzny

Prostą l nazywamy **równoległą** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli nie ma ona punktów wspólnych z tą płaszczyzną lub jest w niej zawarta.



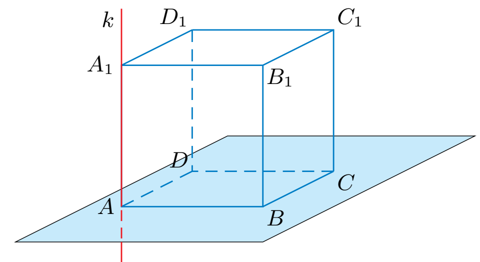
Jeśli prosta l ma z płaszczyzną $\mathcal{P}$ dokładnie jeden punkt wspólny, to mówimy, że prosta l **przecina** płaszczyznę $\mathcal{P}$.



Mówimy, że prosta l jest **prostopadła** do płaszczyzny $\mathcal{P}$, jeśli jest ona prostopadła do każdej prostej zawartej w płaszczyźnie $\mathcal{P}$.

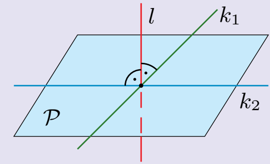
Przykład 3

W sześcianie (rysunek obok) prosta k zawierająca krawędź AA_1 jest prostopadła do płaszczyzny zawierającej podstawę $ABCD$.



Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny

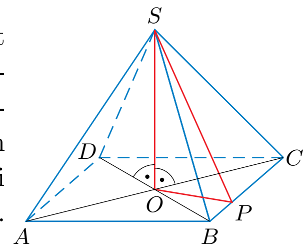
Jeśli prosta l jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie $\mathcal{P}$, to jest ona prostopadła do płaszczyzny $\mathcal{P}$.



Dowód – patrz zadanie 6 na stronie 90.

Przykład 4

Podstawą ostrosłupa (rysunek obok) jest kwadrat $ABCD$. Jeśli odcinek SO jest prostopadły do przekątnych podstawy ostrosłupa, to jest on prostopadły do płaszczyzny zawierającej tę podstawę. Zatem np. dla dowolnego punktu P należącego do krawędzi podstawy ostrosłupa trójkąt SOP jest prostokątny.



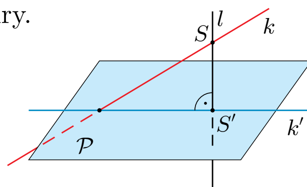
Ćwiczenie 7

Dany jest sześcian o podstawach $ABCD$ i $A_1B_1C_1D_1$ (jak na rysunku w przykładzie 3.). Odcinek CD_1 jest przekątną ściany bocznej tego sześcianu. Wskaż krawędzie podstaw zawarte w prostych prostopadłych do prostej CD_1. Czy prosta CD_1 jest prostopadła do płaszczyzn zawierających te podstawy?

Ćwiczenie 7

AD, A_1D_1, BC, B_1C_1; nie

Dla dowolnego punktu S możemy poprowadzić prostą l przechodzącą przez ten punkt i prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$. Punkt przecięcia prostej l z płaszczyzną $\mathcal{P}$ nazywamy **rzutem prostokątnym** punktu S na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Rzutem prostokątnym figury na płaszczyznę jest figura składająca się z rzutów prostokątnych wszystkich punktów rzutowanej figury.



Na rysunku obok punkt S' jest rzutem prostokątnym punktu S na płaszczyznę $\mathcal{P}$, a prosta k' jest rzutem prostokątnym prostej k na tę płaszczyznę.

D **Ćwiczenie 8**

Odcinek R_1S_1 jest rzutem prostokątnym odcinka RS na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Czy odcinek R_1S_1 może być dłuższy od odcinka RS? Sformułuj i udowodnij odpowiednie twierdzenie.

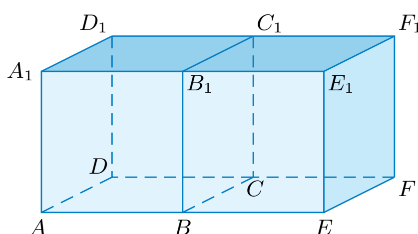
Kiedy stosujemy twierdzenia planimetrii, musimy mieć pewność, że rozpatrywane punkty leżą w jednej płaszczyźnie. Pamiętajmy, że płaszczyznę wyznaczają jednoznacznie:

- trzy punkty nieleżące na jednej prostej,
- dwie przecinające się proste,
- prosta i punkt nieleżący na tej prostej,
- dwie różne proste równoległe.

Zadania

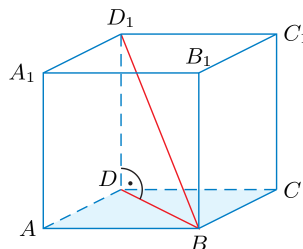
1. Dwa sześciany mają wspólną ścianę BCC_1B_1 (rysunek obok). Wskaż pary wierzchołków tych sześcianów wyznaczające proste równoległe oraz pary wierzchołków wyznaczające proste prostopadłe do prostej:

a) EF_1, b) A_1C_1.



2. Rzutem prostokątnym odcinka D_1B na ścianę $ABCD$ sześcianu jest odcinek DB (rysunek obok). Wskaż odcinek będący rzutem prostokątnym odcinka D_1B na ścianę:

a) $A_1B_1C_1D_1$, c) BCC_1B_1,
b) ADD_1A_1, d) ABB_1A_1.



D **3.** Dla prostych k, l, m leżących w tej samej płaszczyźnie zachodzi własność: jeśli $k \perp l$ i $l \perp m$, to $k \parallel m$. Uzasadnij, że analogiczna własność nie zachodzi dla prostych w przestrzeni.

Ćwiczenie 8

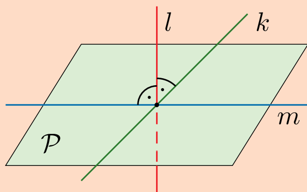
Nie, ponieważ w trójkącie prostokątnym R_1PR, gdzie P jest punktem przecięcia prostej RS z płaszczyzną, odcinek R_1P jest przyprostokątną, a odcinek RP – przeciwprostokątną trójkąta, zatem $|RP| > |R_1P|$ i stąd: $|RS| > |R_1S_1|$.
Jeśli odcinek RS jest równoległy do płaszczyzny $\mathcal{P}$, to odcinki RS i R_1S_1 pokrywają się lub są przeciwległymi bokami prostokąta, więc $|RS| = |R_1S_1|$.
Zatem odcinek R_1S_1, który jest rzutem prostokątnym odcinka RS na płaszczyznę $\mathcal{P}$ nie może być dłuższy od odcinka RS.

Odpowiedzi do zadań

1. **a)** Proste równoległe: BC_1, AD_1
Proste prostopadłe: BE, AB, AE, CF, DC, DF, B_1E_1, A_1B_1, A_1E_1, C_1F_1, D_1C_1, D_1F_1, E_1F, B_1C, A_1D
b) Proste równoległe: B_1F_1, AC, BF
Proste prostopadłe: D_1B_1, C_1E_1, DB, CE, AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1, FF_1, D_1B, B_1D, C_1E, E_1C

2. **a)** D_1B_1 **b)** AD_1 **c)** C_1B **d)** A_1B

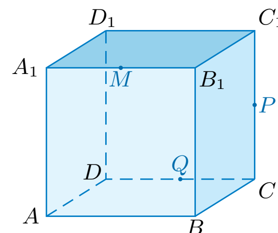
3. Poniższy przykład pokazuje, że własność ta nie zachodzi w przestrzeni.



Zauważmy, że $k \perp l$ i $l \perp m$, ale proste k i m nie są równoległe.

4. Dany jest sześcian o krawędzi długości 2 (rysunek obok). Wskaż przykładowy odcinek, którego końce należą do krawędzi sześcianu, a długości jego rzutów prostokątnych na ściany sześcianu przyjmują wartości:

a) $\sqrt{5}$ i $2\sqrt{2}$, b) 2 i $2\sqrt{2}$, c) $\sqrt{2}$ i $\sqrt{5}$.



5. Trójkąt $A_1B_1C_1$ jest rzutem prostokątnym trójkąta ABC na płaszczyznę $\mathcal{P}$. Ustal, czy:

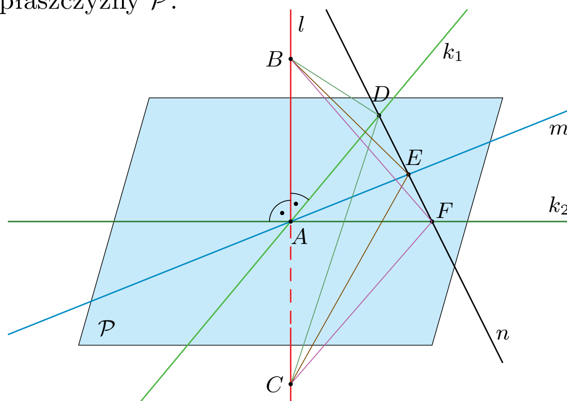
a) obwód trójkąta $A_1B_1C_1$ może być większy od obwodu trójkąta ABC,

b) pole trójkąta $A_1B_1C_1$ może być większe od pola trójkąta ABC,

c) miara kąta $A_1B_1C_1$ może być większa od miary kąta ABC.

D **6.** Przeczytaj dowód twierdzenia o prostej prostopadłej do płaszczyzny i podaj brakujące uzasadnienia.

Rozpatrzmy prostą l prostopadłą do dwóch nierównoległych prostych k_1 i k_2 zawartych w płaszczyźnie $\mathcal{P}$. Niech A będzie punktem wspólnym prostej l i płaszczyzny $\mathcal{P}$.



Niech m będzie dowolną prostą przechodzącą przez punkt A i zawartą w płaszczyźnie $\mathcal{P}$. Na prostej l wybieramy punkty B i C takie, że $|AB| = |AC|$. Na płaszczyźnie $\mathcal{P}$ prowadzimy prostą n przecinającą proste k_1, m i k_2 odpowiednio w punktach D, E i F.
Wówczas $|BD| = |CD|$ oraz $|BF| = |CF|$ (uzasadnij).
Zatem $\triangle BDF \equiv \triangle CDF$ (uzasadnij), skąd otrzymujemy $|CE| = |BE|$ (uzasadnij). Oznacza to, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = 90^\circ$ (uzasadnij). Zatem prosta l jest prostopadła do prostej m, a skoro prosta m była dowolnie wybraną prostą zawartą w $\mathcal{P}$, to $l \perp \mathcal{P}$.

4. M, P i Q – środki krawędzi sześcianu odpowiednio A_1B_1, CC_1 i CD
a) np. MC **b)** np. MQ
c) np. MP

5. a), **b)** nie **c)** tak

6. Wykazanie, że $|BD| = |CD|$:
Z warunków zadania wiadomo, że $|AB| = |AC|$ oraz $\sphericalangle BAD = \sphericalangle CAD = 90^\circ$, ponadto bok AD jest wspólny dla $\triangle BAD$ i $\triangle CAD$, zatem $\triangle BAD \equiv \triangle CAD$ (na podstawie cechy BKB), czyli $|BD| = |CD|$.

Wykazanie, że $|BF| = |CF|$:
Z warunków zadania wiadomo, że $|AB| = |AC|$ oraz $\sphericalangle BAF = \sphericalangle CAF = 90^\circ$, ponadto bok AF jest wspólny dla $\triangle BAF$ i $\triangle CAF$, zatem $\triangle BAF \equiv \triangle CAF$ (na podstawie cechy BKB), czyli $|BF| = |CF|$.

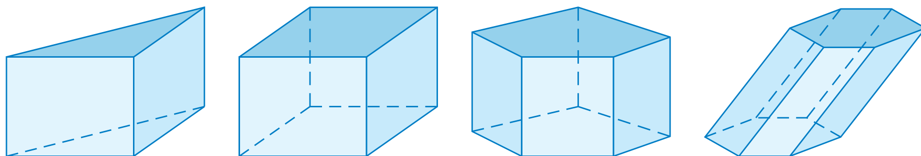
Wykazanie, że $\triangle BDF \equiv \triangle CDF$:
Zostało wykazane, że $|BD| = |CD|$ i $|BF| = |CF|$, ponadto bok DF jest wspólny dla $\triangle BDF$ i $\triangle CDF$, zatem $\triangle BDF \equiv \triangle CDF$ (na podstawie cechy BBB).

Wykazanie, że $|CE| = |BE|$:
Zostało wykazane, że $|BD| = |CD|$ oraz $\triangle BDF \equiv \triangle CDF$, stąd $BDE = CDE$, ponadto bok DE jest wspólny dla $\triangle BDE$ i $\triangle CDE$, zatem $\triangle BDE \equiv \triangle CDE$ (na podstawie cechy BKB), czyli $|BE| = |CE|$.

Wykazanie, że $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = 90^\circ$:
$|BE| = |CE|$, czyli $\triangle BEC$ jest równoramienny. Z warunków zadania wiadomo, że $|AB| = |AC|$, czyli AE jest środkową $\triangle BEC$. W trójkącie równoramiennym środkowa poprowadzona z wierzchołka między ramionami jest jednocześnie wysokością tego trójkąta. Zatem $\sphericalangle BAE = \sphericalangle CAE = 90^\circ$.

2.2. Graniastosłupy

Graniastosłup to wielościan, którego dwie ściany, zwane **podstawami**, są przystającymi wielokątami zawartymi w płaszczyznach równoległych, a pozostałe ściany, zwane **ścianami bocznymi**, są równoległobokami o wierzchołkach należących do podstaw.



Jeśli krawędzie boczne graniastosłupa są prostopadłe do podstaw, to graniastosłup nazywamy **prostym**, w przeciwnym razie graniastosłup nazywamy **pochyłym**. Ściany boczne dowolnego graniastosłupa prostego są prostokątami.

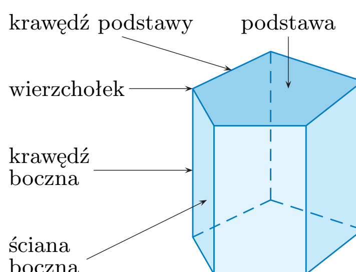
Dowolny odcinek, który łączy płaszczyzny zawierające podstawy graniastosłupa i jest do nich prostopadły, nazywamy **wysokością** graniastosłupa.
Powierzchnię boczną graniastosłupa stanowią wszystkie jego ściany boczne.

Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa jest równe sumie pól jego podstaw i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = 2P_p + P_b$$

Ćwiczenie 1
Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego, którego wysokość jest równa 30 cm, a podstawą jest trójkąt o bokach 6 cm, 8 cm i 10 cm.

W zależności od tego, jakim wielokątem jest podstawa graniastosłupa, mówimy o graniastosłupie trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. Graniastosłup pięciokątny przedstawiony na rysunku obok ma 7 ścian (2 podstawy i 5 ścian bocznych), 15 krawędzi (10 krawędzi podstawy i 5 krawędzi bocznych) oraz 10 wierzchołków.



Ćwiczenie 2
Podaj liczbę ścian, krawędzi i wierzchołków graniastosłupa:

a) trójkątnego, b) czworokątnego, c) sześciokątnego.

Ćwiczenie 3
Czy istnieje graniastosłup, którego liczba krawędzi jest równa: a) 21 b) 25?

Uczeń:
- określa liczbę ścian, wierzchołków i krawędzi graniastosłupa,
- sprawdza, czy istnieje graniastosłup o danej liczbie krawędzi,
- wskazuje elementy charakteryzujące graniastosłup,
- oblicza pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego,
- rysuje siatkę graniastosłupa prostego, mając dany jej fragment.

Ćwiczenie 1
Podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 6 cm i 8 cm.

$P_c = 2 \cdot \frac{6 \cdot 8}{2} + (6 + 8 + 10) \cdot 30 =$
$= 768\ [\text{cm}^2]$

Ćwiczenie 2
a) 5 ścian, 9 krawędzi, 6 wierzchołków
b) 6 ścian, 12 krawędzi, 8 wierzchołków
c) 8 ścian, 18 krawędzi, 12 wierzchołków

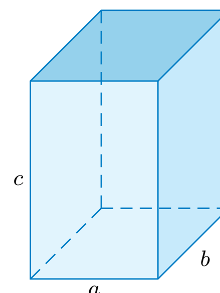
Ćwiczenie 3
a) tak – graniastosłup siedmiokątny
b) nie – liczba krawędzi graniastosłupa musi być podzielna przez 3

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest prostokąt, nazywamy **prostopadłościanem**.

Uwaga. Za podstawę prostopadłościanu możemy przyjąć jego dowolną ścianę.

Pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu o krawędziach a, b, c opisuje wzór:

$$P_c = 2ab + 2ac + 2bc$$



Ćwiczenie 4

Długości krawędzi podstawy prostopadłościanu są równe 4 cm i 6 cm. Oblicz wysokość tego prostopadłościanu, jeśli wiadomo, że jego:

a) pole powierzchni całkowitej wynosi 100 cm^2,

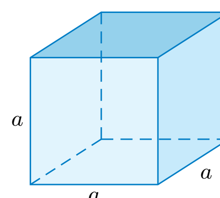
b) pole powierzchni bocznej stanowi 60% pola powierzchni całkowitej.

Ćwiczenie 4
H – wysokość prostopadłościanu
$P_p = 24$
$P_b = 2 \cdot 4H + 2 \cdot 6H = 20H$
a) $2 \cdot 24 + 20H = 100$
$H = 2{,}6$ cm
b) $20H = 0{,}6(48 + 20H)$
$H = 3{,}6$ cm

Prostopadłościan o wszystkich krawędziach równych nazywamy **sześcianem**. Pole powierzchni całkowitej sześcianu o krawędzi a jest równe $6a^2$.

Ćwiczenie 5

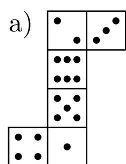
Do wykonania modelu sześcianu zużyto 1620 cm^2 kartonu, z czego 20% stanowiły zakładki. Oblicz długość krawędzi tego sześcianu.

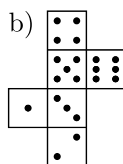


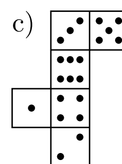
Ćwiczenie 5
a – długość krawędzi sześcianu
$6a^2 = 0{,}8 \cdot 1620$
$a^2 = 216$
$a = 6\sqrt{6}$ cm

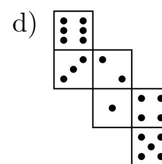
Ćwiczenie 6

Suma oczek znajdujących się na przeciwległych ścianach sześciennej kostki do gry jest równa 7. Czy przedstawiona siatka może być siatką tej kostki?

a) 

b) 

c) 

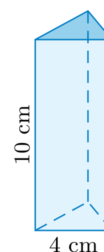
d) 

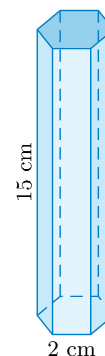
Ćwiczenie 6
a) tak
b) tak
c) nie – na przeciwległych ścianach leżą 1 i 5
d) tak

Graniastosłup prosty, którego podstawą jest wielokąt foremny, nazywamy **prawidłowym**.

D Ćwiczenie 7

Wymiary dwóch graniastosłupów prawidłowych, trójkątnego i sześciokątnego, podano na rysunku obok. Uzasadnij, że pole powierzchni całkowitej jednego z tych graniastosłupów jest o 50% większe od pola powierzchni całkowitej drugiego.





Ćwiczenie 7
Graniastosłup trójkątny:
$P_T = 2 \cdot \frac{16\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 4 \cdot 10 = (8\sqrt{3} + 120)$ [cm^2]
Graniastosłup sześciokątny:
$P_S = 2 \cdot 6 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 2 \cdot 15 = 12\sqrt{3} + 180 = \frac{3}{2}(8\sqrt{3} + 120) = 1{,}5P_T$

Zadania

1. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prostego o wysokości 8 cm, którego podstawą jest:

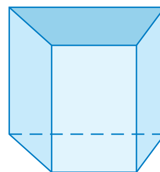
a) romb o kącie ostrym 30° i boku długości 12 cm,

b) trójkąt równoramienny o kącie 120° i ramionach długości 6 cm.

2. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o bokach długości 12 cm, 5 cm, 6 cm i 5 cm. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że:

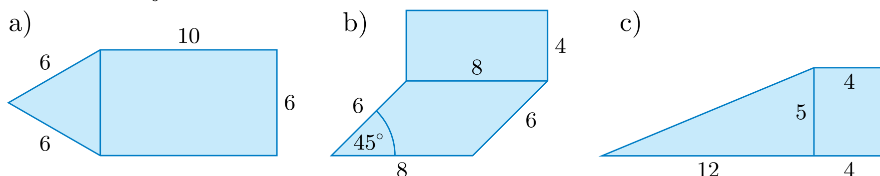
a) jego pole powierzchni bocznej jest równe 560 cm^2,

b) jego pole powierzchni całkowitej jest równe 492 cm^2.



3. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o obwodzie 24 cm. Wysokość graniastosłupa jest równa przeciwprostokątnej podstawy, a pole największej ściany bocznej jest równe 100 cm^2. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego wielościanu.

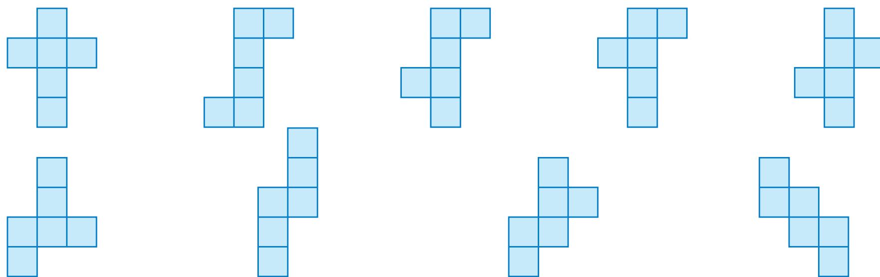
4. Na rysunku poniżej przedstawiono fragment siatki graniastosłupa prostego. Narysuj całą siatkę tego graniastosłupa i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



5. Narysuj siatkę graniastosłupa prawidłowego n-kątnego, którego wszystkie krawędzie mają długość 2 cm, i oblicz jego pole powierzchni całkowitej.

a) $n = 3$　　b) $n = 4$　　c) $n = 6$

6. Istnieje 11 różnych siatek, z których można złożyć model sześcianu. Poniżej przedstawiono 9 z nich. Narysuj dwie brakujące siatki sześcianu.



Odpowiedzi do zadań

1. a) $P_c = 2 \cdot 12^2 \cdot \sin 30° + 4 \cdot 12 \cdot 8 = 528$ [cm^2]

b) $P_c = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \sin 120° + (2 \cdot 6 + 6\sqrt{3}) \cdot 8 = 6(16 + 11\sqrt{3})$ [cm^2]

2. H – wysokość graniastosłupa

a) $P_b = (12 + 5 + 6 + 5)H = 28H = 560$, czyli $H = 20$ cm

b) Wysokość podstawy: $h = 4$ cm

$P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot \frac{(6+12)\cdot 4}{2} + 28H = 72 + 28H = 492$, czyli $H = 15$ cm

3. H – wysokość graniastosłupa i długość przeciwprostokątnej podstawy

a, b – długości przyprostokątnych podstawy

$P_c = 2 \cdot \frac{1}{2}ab + H(a + b + H)$

Pole największej ściany bocznej: $H^2 = 100$, czyli $H = 10$

Stąd:

$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 10^2 \\ a + b = 14 \end{cases}$$

$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$

$ab = 48$

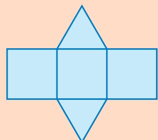
$P_c = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 + 10(14 + 10) = 288$ [cm^2]

4. a) $P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 6 \cdot 10 = 18\sqrt{3} + 180 = 18(\sqrt{3} + 10)$

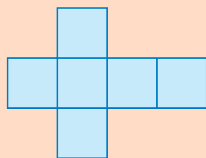
b) $P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \sin 45° + 2 \cdot 6 \cdot 4 + 2 \cdot 8 \cdot 4 = 48\sqrt{2} + 112 = 16(3\sqrt{2} + 7)$

c) $P_c = 2P_p + P_b = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 + (5 + 12 + 13) \cdot 4 = 180$

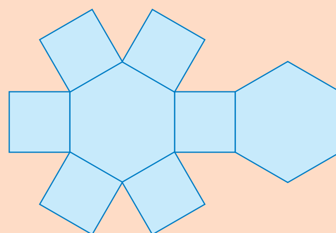
5. a) $P_c = 2 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 2^2 = 2(\sqrt{3} + 6)$ [cm^2]



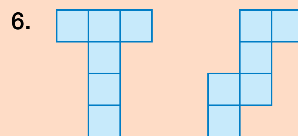
b) $P_c = 6 \cdot 2^2 = 24$ [cm^2]



c) $P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot 2^2 = 12(\sqrt{3} + 2)$ [cm^2]



6.



Uczeń:

- oblicza długości przekątnych graniastosłupa prostego (również z wykorzystaniem trygonometrii),
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni graniastosłupa,
- uzasadnia prawdziwość wzorów dotyczących przekątnych i pola powierzchni danego graniastosłupa.

Ćwiczenie 1

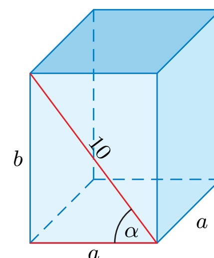
a – krawędź podstawy
b – krawędź boczna
$\frac{a}{25} = 0{,}28$, czyli $a = 7$ cm
$b = \sqrt{25^2 - 7^2} = 24$ [cm]
$P_c = 2 \cdot 7^2 + 4 \cdot 7 \cdot 24 = 770$ [cm^2]

Ćwiczenie 2

d – przekątna ściany bocznej
a) $a = 6$ cm
$\frac{6}{d} = \frac{1}{3}$, czyli $d = 18$ cm
$b = \sqrt{18^2 - 6^2} = \sqrt{288} =$
$= 12\sqrt{2}$ [cm]
$P_c = 2 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot 6 \cdot 12\sqrt{2} =$
$= 18(\sqrt{3} + 12\sqrt{2})$ [cm^2]
b) $b = 6$ cm
$\frac{a}{d} = \frac{1}{3}$, czyli $d = 3a$
$6^2 + a^2 = (3a)^2$,
czyli $a = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm
$P_c = 2 \cdot \frac{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot 6 =$
$= 9\left(\frac{1}{4}\sqrt{3} + 3\sqrt{2}\right)$ [cm^2]

2.3. Odcinki w graniastosłupach

Przykład 1



Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 10 cm i tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{3}{5}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Zauważmy, że $\cos\alpha = \frac{a}{10}$, więc $a = 10 \cdot \frac{3}{5} = 6$ [cm].

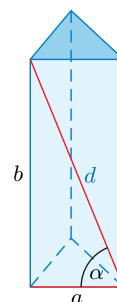
$$b = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ [cm]}$$

Obliczamy pole powierzchni bocznej: $P_b = 4ab = 4 \cdot 6 \cdot 8 = 192$ [cm^2].

Ćwiczenie 1

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 25 cm i tworzy z krawędzią boczną kąt α taki, że $\sin\alpha = 0{,}28$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 2

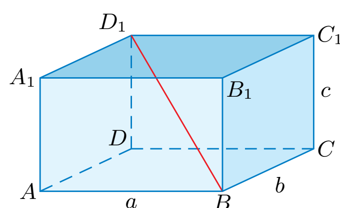


Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią podstawy kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$ (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że:

a) $a = 6$ cm,　　b) $b = 6$ cm.

Ćwiczenie 3

Przekątne AD_1 i CD_1 ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego (rysunek obok) mają długości równe 8 cm. Tworzą one z przekątną podstawy kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{4}$. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.



Przekątną graniastosłupa nazywamy taki odcinek łączący dwa jego wierzchołki, który nie jest zawarty w żadnej ścianie graniastosłupa.

Prostopadłościan ma cztery przekątne.
Na rysunku obok są to odcinki:

$$BD_1,\ AC_1,\ CA_1 \text{ i } DB_1$$

Zwróć uwagę na to, że przekątna ściany bocznej graniastosłupa nie jest przekątną graniastosłupa oraz że graniastosłup trójkątny nie ma przekątnych.

Ćwiczenie 3

a – krawędź podstawy, b – krawędź boczna
$\frac{\frac{1}{2}|AC|}{8} = \frac{1}{4}$, czyli $|AC| = 4$ [cm]
$a\sqrt{2} = 4$, czyli $a = 2\sqrt{2}$ [cm]
$b = \sqrt{8^2 - (2\sqrt{2})^2} = 2\sqrt{14}$ [cm]
$P_b = 4 \cdot 2\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{14} = 32\sqrt{7}$ [cm^2]

D **Ćwiczenie 4**

a) Uzasadnij twierdzenie podane obok.

b) Uzasadnij, że przekątna sześcianu o krawędzi a ma długość równą $a\sqrt{3}$.

Przekątna prostopadłościanu o krawędziach a, b, c ma długość równą:
$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

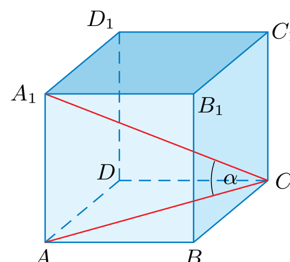
Ćwiczenie 5

Oblicz długości przekątnych wszystkich ścian oraz długość przekątnej prostopadłościanu o krawędziach:

a) 5, 9, 12, b) 6, 8, 15.

Ćwiczenie 6

W sześcianie z tego samego wierzchołka poprowadzono jego przekątną i przekątną podstawy (rysunek obok). Tworzą one kąt α. Oblicz cosinus tego kąta oraz jego przybliżoną miarę z dokładnością do 1°.



Zadania

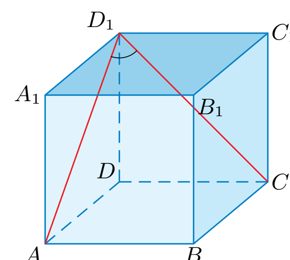
1. Oblicz pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm, a przekątna jego ściany bocznej tworzy:

a) z krawędzią podstawy kąt 30°,

b) z krawędzią boczną kąt 30°,

c) z przekątną graniastosłupa kąt 30°.

D **2.** Kąt między przekątnymi sąsiednich ścian bocznych graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równy 60° (rysunek obok). Wykaż, że graniastosłup ten jest sześcianem.



3. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 4 cm, a przekątna ta tworzy:

a) z przekątną podstawy kąt 45°,

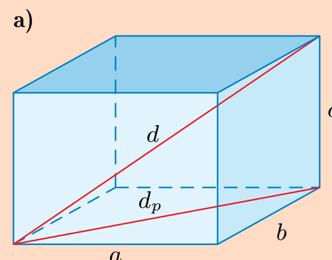
b) z jedną z krawędzi bocznych kąt 30°,

c) z przekątną jednej ze ścian bocznych kąt 30°.

4. Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość $4\sqrt{6}$, a jego wysokość jest równa 8. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 4

a)



Dwukrotnie stosujemy twierdzenie Pitagorasa:

$d_p^2 = a^2 + b^2$

$d^2 = d_p^2 + c^2 = a^2 + b^2 + c^2$

Zatem $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

b) Przekątna graniastosłupa wyraża się wzorem:

$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

W sześcianie $a = b = c$, zatem

$d = \sqrt{3a^2} = a\sqrt{3}$.

Ćwiczenie 5

a) Przekątne ścian: $\sqrt{106}$, 13, 15; przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{10}$

b) Przekątne ścian: 10, $3\sqrt{29}$, 17; przekątna prostopadłościanu: $5\sqrt{13}$

Ćwiczenie 6

a – krawędź podstawy

$|AC| = a\sqrt{2}$, $|A_1C| = a\sqrt{3}$

$\cos\alpha = \frac{|AC|}{|A_1C|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\alpha \approx 35°$

Odpowiedzi do zadań

1. a) $50(1 + \frac{2}{3}\sqrt{3})$ cm^2

b) $50(1 + 2\sqrt{3})$ cm^2

c) $50(1 + 2\sqrt{2})$ cm^2

3. a) 8 cm **b)** $8\sqrt{2}$ cm **c)** 8 cm

4. $a = b$ oraz $c = 8$

$4\sqrt{6} = \sqrt{a^2 + a^2 + 8^2}$

$96 = 2a^2 + 64$

$a = 4$

$P_c = 2 \cdot 4^2 + 4 \cdot 4 \cdot 8 = 160$

2. $|AD| = |CD| = a$, $|DD_1| = b$, $|AD_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = |CD_1|$, $|AD_1| = |CD_1|$ i $\sphericalangle AD_1C = 60°$, więc trójkąt AD_1C jest równoboczny, co oznacza, że $|AC| = |CD_1|$, czyli

$a\sqrt{2} = \sqrt{a^2 + b^2}$, gdzie $a, b > 0$

$2a^2 = a^2 + b^2$

$a^2 = b^2$, $a = b$

Zatem graniastosłup ten jest sześcianem.

5. Trójkąt BEE_1 jest prostokątny oraz
$|BE| = 2 \cdot 4 = 8$ [cm],
zatem
$|BE_1|^2 = 8^2 + 4^2 = 80$,
czyli $|BE_1| = 4\sqrt{5}$ cm.
Trójkąt BDD_1 jest prostokątny oraz
$|BD| = 2 \cdot \frac{4\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$ [cm],
zatem
$|BD_1|^2 = (4\sqrt{3})^2 + 4^2 =$
$= 64$, czyli $|BD_1| = 8$ cm.
$|BF_1| = |BD_1| = 8$ cm

6. a – długość krawędzi podstawy
$(2a)^2 + 5^2 = 10^2$,
czyli $a = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ cm
$P_c = 2 \cdot 6 \cdot \frac{\left(\frac{5\sqrt{3}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} +$
$+ 6 \cdot \frac{5\sqrt{3}}{2} \cdot 5 = \frac{525}{4}\sqrt{3}$ [cm²]

7. $2(\sqrt{5} + 2)$ cm

8. 516 cm²

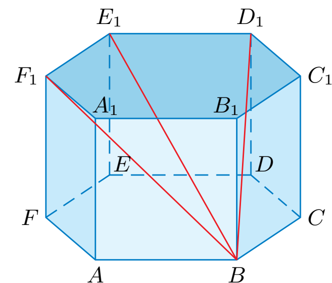
9. a, b – krawędzie podstawy
H – wysokość prostopadłościanu
$|A_1C|^2 = a^2 + b^2 + H^2$
a) $\sin\alpha = \frac{\sqrt{b^2+H^2}}{|A_1C|}$
$\sin\beta = \frac{\sqrt{a^2+H^2}}{|A_1C|}$
$\sin\gamma = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{|A_1C|}$
$\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma =$
$= \frac{b^2+H^2}{|A_1C|^2} + \frac{a^2+H^2}{|A_1C|^2} + \frac{a^2+b^2}{|A_1C|^2} =$
$= \frac{2(a^2+b^2+H^2)}{|A_1C|^2} = \frac{2|A_1C|^2}{|A_1C|^2} = 2$
b) $\cos\alpha = \frac{a}{|A_1C|}$,
$\cos\beta = \frac{b}{|A_1C|}$, $\cos\gamma = \frac{H}{|A_1C|}$
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$
$= \frac{a^2}{|A_1C|^2} + \frac{b^2}{|A_1C|^2} + \frac{H^2}{|A_1C|^2} =$
$= \frac{a^2+b^2+H^2}{|A_1C|^2} = \frac{|A_1C|^2}{|A_1C|^2} = 1$

10. $\frac{\sqrt{33}}{33}$

11. $6\sqrt{23}a^2$

14. $n = 8$

5. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają długość 4 cm. Oblicz długości przekątnych tego graniastosłupa (rysunek obok).

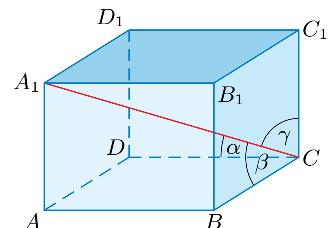


6. Dłuższa przekątna graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 10 cm, a jego wysokość jest równa 5 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

7. Różnica długości przekątnych graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wszystkie krawędzie są równe, wynosi 2 cm. Oblicz długość krawędzi tego graniastosłupa.

8. Oblicz pole powierzchni całkowitej prostopadłościanu, którego przekątne ścian mają długości 10 cm, 17 cm, $3\sqrt{29}$ cm.

D **9.** Przekątna A_1C prostopadłościanu (rysunek obok) tworzy z krawędziami wychodzącymi z wierzchołka C kąty α, β i γ. Wykaż, że:
a) $\sin^2\alpha + \sin^2\beta + \sin^2\gamma = 2$,
b) $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.



10. Pole powierzchni całkowitej graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest trzy razy większe od jego pola powierzchni bocznej. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego graniastosłupa a jego krawędzią boczną.

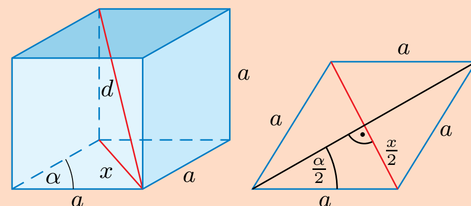
11. Wyznacz pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego krawędź podstawy ma długość a, a dłuższa przekątna jest trzy razy dłuższa od krótszej przekątnej podstawy.

12. D Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym α. Wszystkie krawędzie tego graniastosłupa mają długość a. Uzasadnij, że jego krótsza przekątna ma długość równą $a\sqrt{1 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

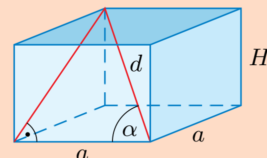
13. D Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt α. Uzasadnij, że pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa jest równe $4d^2\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$.

14. Liczba przekątnych graniastosłupa prawidłowego n-kątnego jest o 24 większa od liczby przekątnych jego wszystkich ścian bocznych. Oblicz n.

12. x – długość krótszej przekątnej podstawy
d – długość krótszej przekątnej graniastosłupa
$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{0{,}5x}{a}$, czyli $x = 2a\sin\frac{\alpha}{2}$
$d^2 = x^2 + a^2 = 4a^2\sin^2\frac{\alpha}{2} + a^2$
Zatem $d = a\sqrt{1 + 4\sin^2\frac{\alpha}{2}}$.

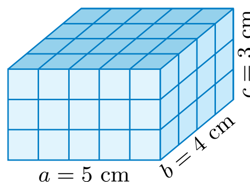


13. a – krawędź podstawy, H – wysokość prostopadłościanu
$\frac{a}{d} = \cos\alpha$, czyli $a = d \cdot \cos\alpha$
$H = \sqrt{d^2 - (a\sqrt{2})^2} = \sqrt{d^2(1 - 2\cos^2\alpha)} = d\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$
$P_b = 4aH = 4d^2\cos\alpha\sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$



2.4. Objętość graniastosłupa

Objętość prostopadłościanu o wymiarach a, b, c wyraża się za pomocą wzoru: $V = abc$.



Przykład 1

Przedstawiony na rysunku powyżej prostopadłościan ma objętość równą $5 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} \cdot 3 \text{ cm} = 60 \text{ cm}^3$. Zauważ, że można go podzielić na 60 sześcianów o objętości 1 cm^3 każdy.

Ćwiczenie 1

Dane są prostopadłościany P_1 i P_2 o wymiarach:

P_1: 15 cm × 2 dm × 10 cm, P_2: 0,12 m × 1,2 dm × 22 cm

Który z nich ma większą objętość?

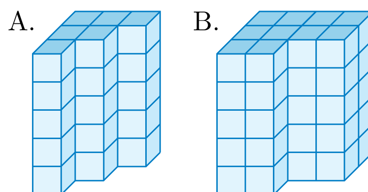
Ćwiczenie 2

Pole powierzchni całkowitej sześcianu jest równe $1{,}5 \text{ dm}^2$. Oblicz objętość tego sześcianu.

Objętość sześcianu o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru: $V = a^3$.

Ćwiczenie 3

Na rysunkach przedstawiono graniastosłupy ułożone z sześciennych kostek o objętości 1 cm^3 każda. Oblicz objętości tych graniastosłupów.



Objętość dowolnego graniastosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy graniastosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 2

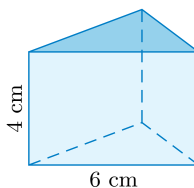
Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego o krawędzi podstawy 6 cm i wysokości 4 cm.

Obliczamy pole podstawy:

$$P_p = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3} \text{ [cm}^2\text{]}$$

Zatem objętość:

$$V = P_p \cdot H = 9\sqrt{3} \cdot 4 = 36\sqrt{3} \text{ [cm}^3\text{]}$$



Uczeń:

- oblicza objętość graniastosłupa prostego,
- oblicza objętość graniastosłupa pochyłego,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania objętości graniastosłupa,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności z wykorzystaniem wzoru na objętość graniastosłupa prostego.

Ćwiczenie 1

$V_1 = 15 \cdot 20 \cdot 10 = 3000$ [cm^3]

$V_2 = 12 \cdot 12 \cdot 22 = 3168$ [cm^3]

Większą objętość ma prostopadłościan P_2.

Ćwiczenie 2

a – długość krawędzi sześcianu

$P_c = 6a^2 = 1{,}5$, czyli $a = 0{,}5$ dm

$V = a^3 = 0{,}125 \text{ dm}^3$

Ćwiczenie 3

$V_A = 5 \cdot 6 = 30$ [cm^3]

$V_B = 5 \cdot 10 = 50$ [cm^3]

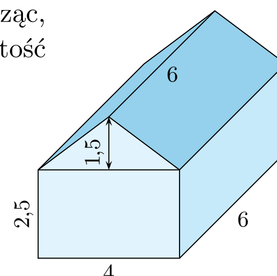
Ćwiczenie 4
Wyznacz wzór na objętość graniastosłupa prawidłowego:

a) trójkątnego, b) sześciokątnego,

którego wszystkie krawędzie są równe i mają długość a.

Ćwiczenie 5
a) Oblicz objętość graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o krawędzi podstawy 4 cm, którego pole powierzchni bocznej jest równe 180 cm^2.

b) Pole powierzchni bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe sumie pól jego podstaw. Wiedząc, że krawędź podstawy ma długość 5 cm, oblicz objętość tego graniastosłupa.



Ćwiczenie 6
Oblicz kubaturę (objętość) budynku przedstawionego obok na schematycznym rysunku. Wymiary tego budynku podano w metrach.

Zadania

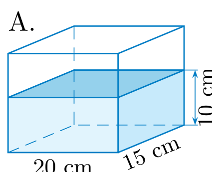
1. a) Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 7 cm, a jego podstawą jest trapez o bokach długości 4 cm, 4 cm, 4 cm i 8 cm. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

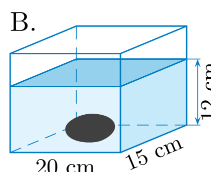
b) Podstawy trapezu prostokątnego mają długości a i $2a$, a jego kąt ostry jest równy α. Wyznacz objętość graniastosłupa prostego o wysokości $3a$, którego podstawą jest ten trapez.

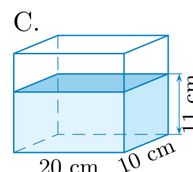
2. a) Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 9 cm, a pole jego podstawy jest równe 16 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

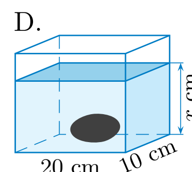
b) Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa. Jakie wartości może przyjmować α?

3. Do dwóch akwariów (rysunki A i C) wrzucono kolejno ten sam kamień (rysunki B i D). Za każdym razem kamień był całkowicie zanurzony w wodzie. Oblicz x.

A.


B.


C.


D.


Ćwiczenie 4

a) $V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^3$

b) $V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a = \frac{3\sqrt{3}}{2}a^3$

Ćwiczenie 5

H – wysokość graniastosłupa

a) $P_b = 6 \cdot 4 \cdot H = 180$, czyli $H = 7{,}5$ [cm]

$V = 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 7{,}5 = 180\sqrt{3}$ [cm^3]

b) $3 \cdot 5 \cdot H = 2 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4}$, czyli $H = \frac{5\sqrt{3}}{6}$ cm

$V = \frac{5^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{5\sqrt{3}}{6} = \frac{125}{8}$ [cm^3]

Ćwiczenie 6

Pole podstawy:

$P_p = 4 \cdot 2{,}5 + \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 1{,}5 = 13$ [m^2]

Objętość graniastosłupa:

$V = 13 \cdot 6 = 78$ [m^3]

Odpowiedzi do zadań

1. a) Wysokość podstawy:

$h_p = 2\sqrt{3}$ cm

$V = \frac{(4+8)\cdot 2\sqrt{3}}{2} \cdot 7 = 84\sqrt{3}$ [cm^3]

b) Wysokość podstawy:

$h_p = a \operatorname{tg} \alpha$

$V = \frac{1}{2}(a + 2a) \cdot a \operatorname{tg} \alpha \cdot 3a = \frac{9}{2}a^3 \operatorname{tg} \alpha$

2. a) Długość krawędzi podstawy: $a = 4$ cm

Wysokość graniastosłupa: $H = \sqrt{81 - 32} = 7$ [cm]

$V = 16 \cdot 7 = 112$ [cm^3]

b) Długość krawędzi podstawy: $a = d \cdot \cos\alpha$

Wysokość graniastosłupa: $H = \sqrt{d^2 - (a\sqrt{2})^2} = d\sqrt{1 - 2\cos^2\alpha} = d\sqrt{-\cos 2\alpha}$

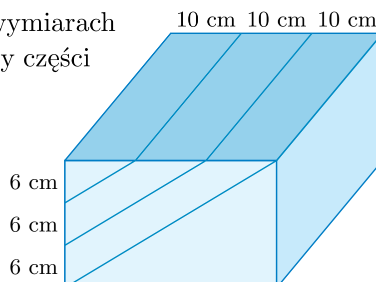
$V = d^3 \cos^2\alpha\sqrt{-\cos 2\alpha}$

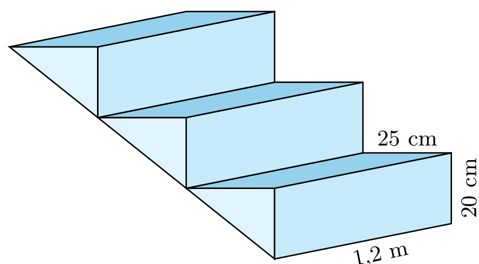
$-\cos 2\alpha > 0$ i $\alpha < 90^\circ$, czyli $\alpha \in (45^\circ; 90^\circ)$

3. Objętość kamienia: $20 \cdot 15 \cdot (12 - 10) = 600$ [cm^3]

Zatem $20 \cdot 10 \cdot (x - 11) = 600$, czyli $x = 14$ cm.

4. Prostopadłościenny drewniany klocek o wymiarach 18 cm × 30 cm × 50 cm przecięto na cztery części mające kształty graniastosłupów tak, jak przedstawiono na rysunku obok. Oblicz objętość każdej z otrzymanych części.





5. Schody składają się z 15 jednakowych betonowych stopni o wymiarach podanych na rysunku obok. Oblicz objętość betonu zużytego na ich wykonanie.

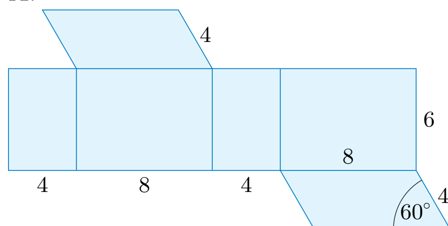
6. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt, którego dwa boki mają długości $3a$ i $a\sqrt{3}$, a miara kąta między nimi wynosi $30°$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że jego pole powierzchni całkowitej jest dwa razy większe niż pole powierzchni bocznej.

7. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość b, a przekątne jego sąsiednich ścian bocznych poprowadzone z jednego wierzchołka tworzą kąt $45°$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

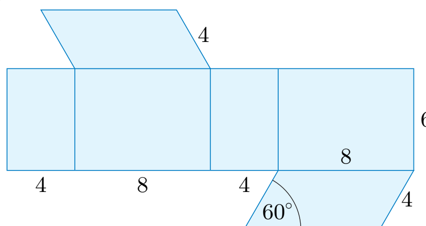
8. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o kącie ostrym α. Przekątna ściany bocznej ma długość d i tworzy z krawędzią podstawy kąt β. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

9. Na którym z poniższych rysunków przedstawiono siatkę graniastosłupa? Oblicz objętość tego graniastosłupa.

A.



B.



10. Objętość graniastosłupa prostego, którego podstawą jest romb o kącie ostrym $30°$, jest równa 27 cm^3, a jego pole powierzchni bocznej jest równe 36 cm^2. Narysuj siatkę tego graniastosłupa.

6. H – wysokość graniastosłupa, x – nieznany bok podstawy

$x^2 = (3a)^2 + (a\sqrt{3})^2 - 2 \cdot 3a \cdot a\sqrt{3} \cdot \cos 30° = 3a^2$, zatem $x = a\sqrt{3}$

$P_p = \frac{1}{2} \cdot 3a \cdot a\sqrt{3} \sin 30° = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

$2 \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = H(3a + 2\sqrt{3}a)$, skąd $H = \frac{3(2-\sqrt{3})}{2}a$

$V = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 \cdot \frac{3(2-\sqrt{3})}{2}a = \frac{9}{8}(2\sqrt{3} - 3)a^3$

7. d – przekątna ściany bocznej, H – wysokość graniastosłupa

$b^2 = d^2 + d^2 - 2 \cdot d \cdot d \cdot \cos 45°$, czyli $b^2 = d^2(2 - \sqrt{2})$

$d^2 = \frac{b^2(2+\sqrt{2})}{2} = b^2 + \frac{\sqrt{2}}{2}b^2$

$H^2 = d^2 - b^2 = \frac{\sqrt{2}}{2}b^2$, czyli $H = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}b$

$V = \frac{b^2\sqrt{3}}{4} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{2}}b = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{2}}b^3$

4. Obliczamy objętości brył, zaczynając od górnego lewego rogu:

$V_1 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot 50 = 1500$ [cm^3]

$V_2 = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 20 \cdot 50 - 1500 = 4500$ [cm^3]

$V_3 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 30 \cdot 50 - 6000 = 7500$ [cm^3]

$V_4 = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 30 \cdot 50 = 13500$ [cm^3]

5. $V = 15 \cdot \frac{1}{2} \cdot 0{,}25 \cdot 0{,}2 \cdot 1{,}2 = 0{,}45$ [m^3]

8. a – krawędź podstawy

H – wysokość graniastosłupa

$\frac{H}{d} = \sin\beta$, czyli $H = d\sin\beta$

$\frac{a}{d} = \cos\beta$, czyli $a = d\cos\beta$

$V = a^2 \sin\alpha \cdot H = d^3 \cos^2\beta \sin\beta \sin\alpha$

9. A – nie, B – tak, $V = 96\sqrt{3}$

10. a – krawędź podstawy

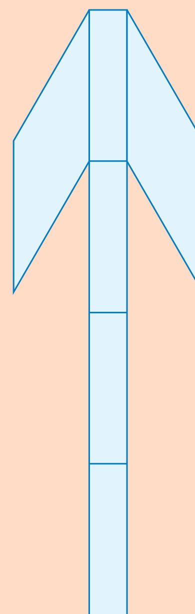
H – wysokość graniastosłupa

$P_p = a^2 \sin 30° = \frac{a^2}{2}$

$V = \frac{a^2}{2}H = 27$

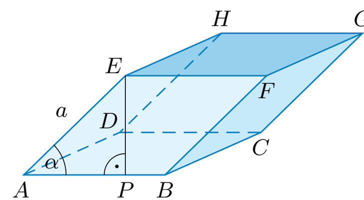
$P_b = 4aH = 36$

Zatem $a = 6$ cm, $H = 1{,}5$ cm.



Warto wiedzieć

Graniastosłupy pochyłe



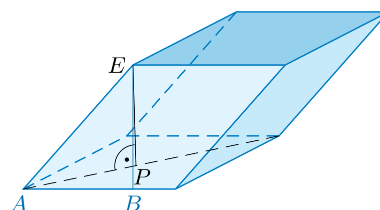
Ściany boczne $ABFE$ i $DCGH$ graniastosłupa pochyłego przedstawionego na rysunku obok są rombami o boku a i kącie ostrym α. Podstawy oraz pozostałe ściany boczne tego graniastosłupa są kwadratami. Odcinek EP jest jego wysokością.

$|EP| = a\sin\alpha$, zatem objętość tego graniastosłupa:

$$V = P_p \cdot h = a^2 \cdot a\sin\alpha = a^3\sin\alpha$$

Zauważ, że objętość tego graniastosłupa możemy również wyznaczyć, przyjmując, że jego podstawami są romby $ABFE$ i $DCGH$. Wówczas otrzymujemy:

$$V = P'_p \cdot h' = a^2\sin\alpha \cdot a = a^3\sin\alpha$$



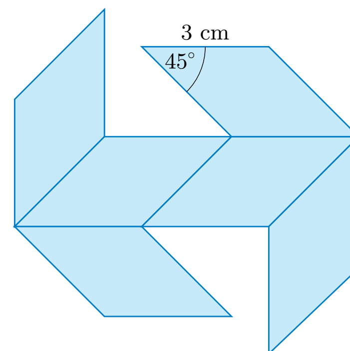
Innym przykładem graniastosłupa pochyłego jest **romboedr**, czyli graniastosłup, którego wszystkie ściany są przystającymi rombami. Na rysunku obok przedstawiono romboedr, którego wysokością jest odcinek EP.

Zauważ, że wysokość ściany bocznej nie jest wysokością romboedru.

*1. a) Oblicz wysokość romboedru, którego każda ściana jest rombem o boku 4 i kącie ostrym 60°.

D b) Wyznacz wysokość romboedru, którego każda ściana jest rombem o boku a i kącie ostrym α. Uzasadnij, że objętość tego romboedru dana jest wzorem:

$$V = a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}$$



2. Na rysunku obok przedstawiono siatkę romboedru, którego ścianami są romby o boku długości 3 cm i kącie ostrym 45°.

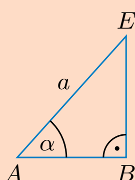
a) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego romboedru.

b) Korzystając ze wzoru podanego w zadaniu 1, oblicz objętość tego romboedru z dokładnością do 0,01 cm^3.

Odpowiedzi do zadań

1. a) $\frac{4}{3}\sqrt{6}$

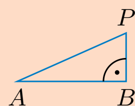
b)



$\frac{|AB|}{a} = \cos\alpha$,

czyli $|AB| = a\cos\alpha$

Na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych $AB \perp BP$ (patrz s. 109).



$\sphericalangle BAP = \frac{\alpha}{2}$,

zatem $\frac{|AB|}{|AP|} = \cos\frac{\alpha}{2}$,

czyli $|AP| = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

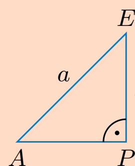
Zauważmy, że

$\cos\alpha = \cos 2\cdot\frac{\alpha}{2} =$

$= 2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 1$,

czyli $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}$,

stąd $|AP| = \frac{a\cos\alpha}{\sqrt{\frac{\cos\alpha+1}{2}}}$.



$$h = \sqrt{a^2 - \frac{a^2\cos^2\alpha}{\frac{\cos\alpha+1}{2}}} = a\sqrt{1 - \frac{2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+1}} = a\sqrt{\frac{\cos\alpha+1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+1}} =$$

$$= a\sqrt{\frac{(1-\cos\alpha)(1+2\cos\alpha)}{\cos\alpha+1}} = (1-\cos\alpha)a\sqrt{\frac{1+2\cos\alpha}{\sin^2\alpha}} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot a\sqrt{1+2\cos\alpha}$$

$$V = P_p \cdot h = a^2\sin\alpha \cdot \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} \cdot a\sqrt{1+2\cos\alpha} = a^3(1-\cos\alpha)\sqrt{1+2\cos\alpha}$$

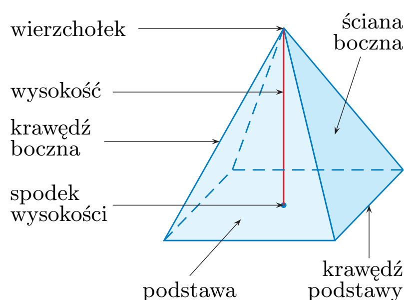
2. a) $P_c = 6\cdot 3^2 \cdot \sin 45^\circ = 27\sqrt{2}$ [cm^2]

b) 12,29 cm^3

2.5. Ostrosłupy

Ostrosłup to wielościan, którego jedna ściana, zwana **podstawą**, jest dowolnym wielokątem, a pozostałe ściany, nazywane **ścianami bocznymi**, są trójkątami o wspólnym wierzchołku, zwanym **wierzchołkiem ostrosłupa**.

Wysokością ostrosłupa nazywamy odcinek, którego jednym końcem jest wierzchołek ostrosłupa, a drugim – rzut prostokątny wierzchołka na płaszczyznę podstawy, zwany **spodkiem wysokości**.



Ostrosłup nazywamy trójkątnym, czworokątnym, pięciokątnym itd. – w zależności od tego, jakim wielokątem jest jego podstawa. Na rysunku przedstawiono ostrosłup czworokątny.

Uczeń:
- wskazuje elementy charakteryzujące ostrosłup,
- oblicza pole powierzchni ostrosłupa, mając daną jego siatkę,
- rysuje siatkę ostrosłupa prostego, mając dany jej fragment,
- oblicza pole powierzchni bocznej i pole powierzchni całkowitej ostrosłupa,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania pola powierzchni ostrosłupa.

Definicja

Ostrosłup nazywamy **prostym**, jeśli wszystkie jego krawędzie boczne mają tę samą długość.
Jeśli podstawą ostrosłupa prostego jest wielokąt foremny, to taki ostrosłup nazywamy **prawidłowym**.

D Ćwiczenie 1

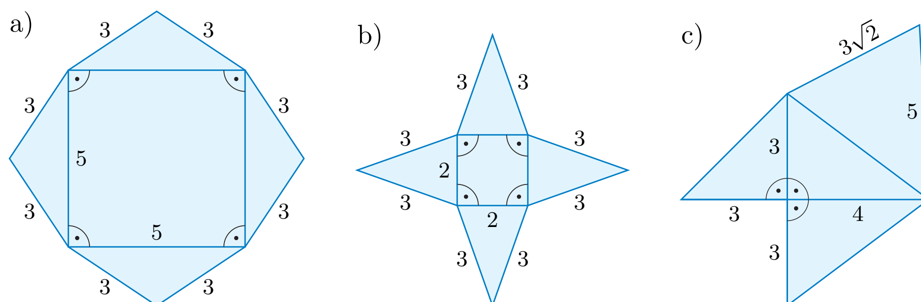
Uzasadnij, że w ostrosłupie prostym spodek wysokości jest środkiem okręgu opisanego na podstawie tego ostrosłupa.

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa jest równe sumie pola jego podstawy i pola powierzchni bocznej.

$$P_c = P_p + P_b$$

Ćwiczenie 2

Czy na rysunku przedstawiono siatkę ostrosłupa prostego? Jeśli tak, to oblicz jego pole powierzchni całkowitej.



Ćwiczenie 1

Niech S będzie wierzchołkiem ostrosłupa, O – spodkiem jego wysokości, a n-kąt $A_1A_2\ldots A_n$ – jego podstawą.
Jeżeli ostrosłup jest prosty, to $|SA_1| = |SA_2| = \ldots = |SA_n|$.
Stąd trójkąty $SOA_1, SOA_2, \ldots, SOA_n$ są przystające.
Zatem $|OA_1| = |OA_2| = \ldots = |OA_n|$.
Oznacza to, że punkt O jest równo oddalony od wszystkich wierzchołków n-kąta $A_1A_2\ldots A_n$, czyli jest środkiem okręgu opisanego na podstawie ostrosłupa.

Ćwiczenie 2

a) nie – wysokość ściany bocznej: $\sqrt{3^2 - 2{,}5^2} = \sqrt{2{,}75}$ nie może być mniejsza od połowy krawędzi podstawy: 2,5

b) tak, $P_c = 2^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2\sqrt{2} = 4(1 + 2\sqrt{2})$, wysokość ściany bocznej: $h_b = 2\sqrt{2}$

c) nie – krawędzie boczne muszą mieć równe długości

Multiteka
- Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.5

Generator testów i sprawdzianów

Ćwiczenie 3

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a krawędź podstawy ma długość 4 cm.

Ćwiczenie 4

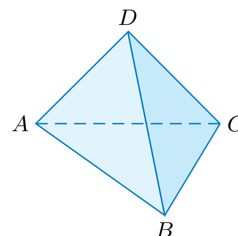
Podstawa ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma pole równe $25\sqrt{3}$. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa, jeśli jego pole powierzchni całkowitej jest siedmiokrotnie większe od pola podstawy.

Kątem płaskim przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego nazywamy kąt między ramionami trójkąta równoramiennego będącego ścianą boczną tego ostrosłupa.

Ćwiczenie 5

Oblicz pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 6 cm, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 60°.

Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego wszystkie ściany są trójkątami równobocznymi, nazywamy **czworościanem foremnym**.



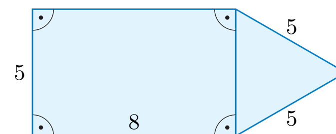
Ćwiczenie 6

a) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego, którego krawędź ma długość 5 cm.

b) Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $49\sqrt{3}$ cm^2.

Zadania

1. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prostego. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.



2. Podstawą ostrosłupa prostego jest prostokąt o bokach długości 6 cm i 8 cm. Dwie spośród jego ścian bocznych są trójkątami równobocznymi. Oblicz wysokość tego ostrosłupa (rozpatrz dwa przypadki).

Ćwiczenie 3
x – długość krawędzi ściany bocznej
$x\sqrt{2} = 4$, czyli $x = 2\sqrt{2}$ cm
$P_c = \frac{4^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 =$
$= 4(3 + \sqrt{3})$ [cm^2]

Ćwiczenie 4
a – długość krawędzi podstawy
h_b – wysokość ściany bocznej
$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$, czyli $a = 10$
$P_c = 25\sqrt{3} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h_b =$
$= 7 \cdot 25\sqrt{3}$
$15h_b = 6 \cdot 25\sqrt{3}$
$h_b = 10\sqrt{3}$

Ćwiczenie 5
Ściany boczne są trójkątami równobocznymi.
$P_c = 6^2 + 4 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} =$
$= 36(1 + \sqrt{3})$ [cm^2]

Ćwiczenie 6
a) $P_c = 4 \cdot \frac{5^2\sqrt{3}}{4} = 25\sqrt{3}$ [cm^2]
b) a – długość krawędzi
$P_c = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 49\sqrt{3}$,
czyli $a = 7$ cm
Suma długości wszystkich krawędzi: $6 \cdot 7 = 42$ [cm]

Odpowiedzi do zadań

1. $P_c = 40 + 2 \cdot \frac{5^2}{4}\sqrt{3} + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 3 = 64 + \frac{25}{2}\sqrt{3}$

2. h – wysokość ostrosłupa

I przypadek – krawędzie boczne o długości 6 cm
$h = \sqrt{6^2 - 5^2} = \sqrt{11}$ [cm]

II przypadek – krawędzie boczne o długości 8 cm
$h = \sqrt{8^2 - 5^2} = \sqrt{39}$ [cm]

3. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 12 cm. Tworzy ona z wysokością ściany bocznej kąt α taki, że $\sin\alpha = \frac{5}{13}$. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

4. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 8 cm^2, a jego ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o kącie między ramionami 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

5. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z krawędzią boczną tego ostrosłupa kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$. Krawędź podstawy ma długość 3 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 2 cm, a kąt między nimi jest równy 30°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

7. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym suma długości jednej krawędzi podstawy i wysokości ściany bocznej jest równa s, a kąt między krawędzią boczną a krawędzią podstawy ma miarę α. Wyznacz pole powierzchni bocznej tego wielościanu.

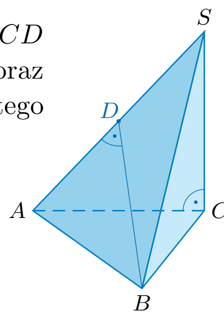
8. Wyznacz pole powierzchni bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego wysokość jest równa h, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 2α.

9. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym krawędź podstawy ma długość 8, a kąt między wysokościami sąsiednich ścian bocznych ma miarę 30°. Oblicz wysokość tego ostrosłupa oraz jego pole powierzchni całkowitej.

10. Dany jest ostrosłup prawidłowy sześciokątny, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 9 cm. Różnica między polem koła opisanego na podstawie tego ostrosłupa a polem koła wpisanego w tę podstawę wynosi 8π cm^2. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

11. Podstawą ostrosłupa o wierzchołku S jest kwadrat $ABCD$ o boku a. Krawędź SA jest prostopadła do podstawy oraz $|SA| = a$. Wyznacz długości pozostałych krawędzi tego ostrosłupa oraz jego pole powierzchni całkowitej.

12. Dany jest ostrosłup trójkątny, w którym krawędź SC jest prostopadła do podstawy ABC (rysunek obok) oraz $|AB| = 5$, $|BC| = 3$, $|AC| = |SC| = 4$. Oblicz cosinusy kątów trójkąta ABS.



10. a – długość krawędzi podstawy
Pole koła opisanego na podstawie: $P_o = \pi \cdot a^2$
Pole koła wpisanego w podstawę: $P_w = \pi \cdot \frac{3a^2}{4}$
$\pi \cdot a^2 - \pi \cdot \frac{3a^2}{4} = 8\pi$
$a = 4\sqrt{2}$ cm
$P_c = 6 \cdot \frac{(4\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} + 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 9 = 12(4\sqrt{3} + 9\sqrt{2})$ [cm^2]

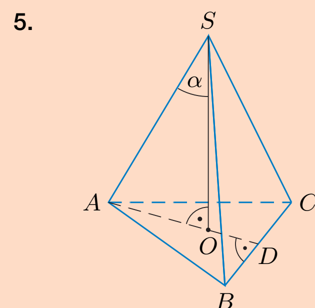
11. Pozostałe krawędzie: $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{2}$, $a\sqrt{3}$. $P_c = a^2(2+\sqrt{2})$

12. Trójkąty ACS i BCS są prostokątne, więc $|BS| = 5$ i $|AS| = 4\sqrt{2}$.
$|AD| = |DS| = 2\sqrt{2}$
$\cos\sphericalangle ASB = \cos\sphericalangle SAB = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$
$\cos\sphericalangle ABS = 1 - 2\sin^2\sphericalangle ABD = 1 - 2\cos^2\sphericalangle SAB = 1 - 2\left(\frac{2\sqrt{2}}{5}\right)^2 = 1 - \frac{16}{25} = \frac{9}{25}$

3. 360 cm^2

4. a – długość krawędzi podstawy
b – długość krawędzi ściany bocznej
Z twierdzenia cosinusów:
$a^2 = b^2 + b^2 - 2 \cdot b^2 \cos 30°$
$8 = 2b^2 - b^2\sqrt{3}$
$b^2 = 8(2+\sqrt{3})$
$P_c = 8 + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8(2+\sqrt{3}) \cdot$
$\cdot \sin 30° = 8(3+\sqrt{3})$ [cm^2]

5.



$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$ [cm]
$\frac{|OS|}{|AS|} = 0{,}8$,
czyli $|OS| = \frac{4}{5}|AS|$
$\left(\frac{4}{5}|AS|\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = |AS|^2$
$|AS| = \frac{5\sqrt{3}}{3}$ cm
$|OS| = \frac{4\sqrt{3}}{3}$ cm
$|DS| = \sqrt{\frac{25}{3} - \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{73}{12}} =$
$= \frac{\sqrt{73}}{2\sqrt{3}}$ [cm]
$P_c = \frac{3^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot \frac{\sqrt{73}}{2\sqrt{3}} =$
$= \frac{3\sqrt{3}}{4}(3+\sqrt{73})$ [cm^2]

6. a – długość krawędzi podstawy
Z twierdzenia cosinusów:
$a^2 = 2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2^2 \cos 30°$
$a^2 = 8 - 4\sqrt{3}$
$P_c = \frac{(8-4\sqrt{3})\sqrt{3}}{4} +$
$+ 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 \cdot \sin 30° = 2\sqrt{3}$ [cm^2]

7. $\frac{3s^2 \operatorname{tg}\alpha}{(\operatorname{tg}\alpha + 2)^2}$

8. $2h^2 \operatorname{tg} 2\alpha$

9. $H = 4\sqrt{3(1+\sqrt{3})}$
$P_c = 96\left(\sqrt{3} + \sqrt{6+3\sqrt{3}}\right)$

Szlify diamentów

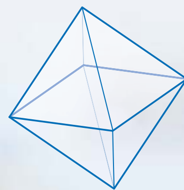
Diamenty po oszlifowaniu często mają kształt wielościanu wypukłego.



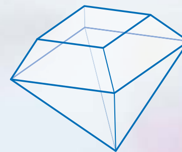
Wielościan nazywamy wypukłym, jeśli każdy odcinek, którego końce są punktami tego wielościanu, jest cały w nim zawarty.

Na szkicach poniżej pokazano najwcześniejsze szlify diamentów w Europie.

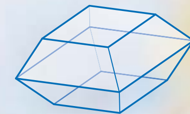
Pierwsze szlify diamentów polegały na wygładzaniu naturalnych ścianek kryształów. Dopiero wynalezienie tarczy szlifierskiej pozwoliło na skośne ścinanie krawędzi diamentów i tworzenie tzw. fasetek, czyli symetrycznie rozmieszczonych ścianek.



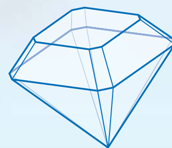
szpiczasty kamień
XIV w.



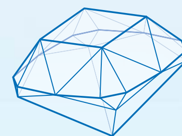
gruby kamień
XIV w.



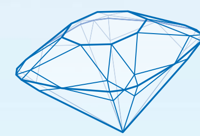
cienki kamień
XIV w.



pojedyncze dobro
XV w.



szlif Mazarina
XVII w.



szlif Peruzziego
XVIII w.

Wzór Eulera

Dla dowolnego wielościanu wypukłego zachodzi zależność opisana tzw. wzorem Eulera:

$$s - k + w = 2$$

gdzie s oznacza liczbę ścian, k – liczbę krawędzi, w – liczbę wierzchołków.

1 Sprawdź prawdziwość wzoru Eulera dla wielościanów, których kształt mają pierwsze trzy szlify diamentów przedstawione na ilustracji.

1. Szpiczasty kamień: $s = 8, k = 12, w = 6$. Wzór Eulera: $8 - 12 + 6 = 2$
Gruby kamień: $s = 9, k = 16, w = 9$. Wzór Eulera: $9 - 16 + 9 = 2$
Cienki kamień: $s = 10, k = 20, w = 12$. Wzór Eulera: $10 - 20 + 12 = 2$

2.6. Objętość ostrosłupa

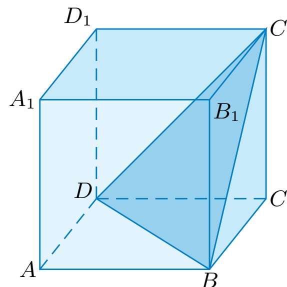
Objętość dowolnego ostrosłupa wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$$

gdzie P_p jest polem podstawy ostrosłupa, a H – jego wysokością.

Przykład 1

Sześcian o krawędzi długości 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki B, D i C_1 (rysunek obok). Oblicz objętości wielościanów otrzymanych w ten sposób.



Jednym z wielościanów jest ostrosłup, którego podstawą jest trójkąt BDC o polu:

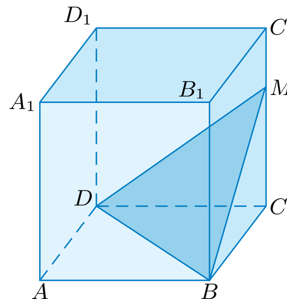
$$P_p = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 6 = 18 \text{ [cm}^2\text{]}$$

Wysokość tego ostrosłupa $H = 6$ cm, zatem jego objętość $V = \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 = 36$ [cm^3].

Natomiast objętość drugiego wielościanu jest równa $6^3 - 36 = 180$ [cm^3].

Ćwiczenie 1

Wysokość graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm, a przekątna podstawy ma długość 8 cm. Oblicz objętości wielościanów powstałych z przecięcia graniastosłupa płaszczyzną BDM (rysunek obok), jeśli punkt M należy do krawędzi CC_1 i odcinek CM jest dwa razy dłuższy od odcinka MC_1.

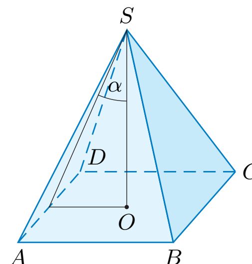


Ćwiczenie 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego o wysokości równej 9, jeśli cosinus kąta między:

a) wysokością tego ostrosłupa a wysokością jego ściany bocznej jest równy 0,9 (rysunek obok),

b) wysokością tego ostrosłupa a jego krawędzią boczną jest równy 0,6.



Ćwiczenie 3

Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe P, a wysokość jego ściany bocznej jest równa h. Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

Uczeń:

- oblicza objętość ostrosłupa prawidłowego,
- stosuje funkcje trygonometryczne do obliczania objętości ostrosłupa,
- rozwiązuje zadania o podwyższonym stopniu trudności dotyczące ostrosłupów.

Ćwiczenie 1

Długość krawędzi podstawy:

$a = 4\sqrt{2}$ cm

$|CM| = \frac{2}{3}|CC_1| = 4$ cm

$V_1 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (4\sqrt{2})^2 \cdot 4 = \frac{64}{3}$ [cm^3]

$V_2 = (4\sqrt{2})^2 \cdot 6 - \frac{64}{3} = \frac{512}{3}$ [cm^3]

Ćwiczenie 2

a – długość krawędzi podstawy

b – długość krawędzi ściany bocznej

a) $\frac{9}{h_b} = 0{,}9$, czyli $h_b = 10$

$\left(\frac{1}{2}a\right)^2 + 9^2 = 10^2$,

czyli $a^2 = 76$

$V = \frac{1}{3} \cdot 76 \cdot 9 = 228$

b) $\frac{9}{b} = 0{,}6$, czyli $b = 15$

$\left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 + 9^2 = 15^2$,

zatem $a^2 = 288$

$V = \frac{1}{3} \cdot 288 \cdot 9 = 864$

Ćwiczenie 3

Długość krawędzi podstawy: $\sqrt{P}$

H – wysokość ostrosłupa

$H^2 + \left(\frac{1}{2}\sqrt{P}\right)^2 = h^2$, czyli $H = \sqrt{h^2 - \frac{1}{4}P}$

$P_c = P + 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \sqrt{P} \cdot h = P + 2h\sqrt{P}$

$V = \frac{1}{3}P\sqrt{h^2 - \frac{1}{4}P}$

Multiteka

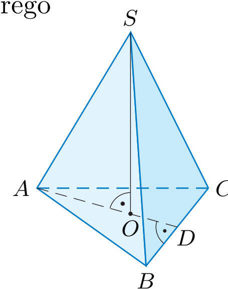
- Objętość ostrosłupa

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.6

Generator testów i sprawdzianów

Przykład 2

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 8 cm, a krawędź boczna – 10 cm.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok oraz długość krawędzi podstawy oznaczmy przez a.
Wówczas:

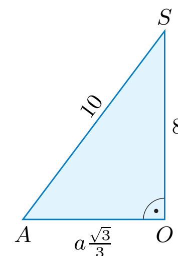
$$|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

Spodek wysokości ostrosłupa – punkt O – jest środkiem okręgu opisanego na podstawie, zatem:

$$|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Środek okręgu opisanego na trójkącie równobocznym dzieli jego wysokość w stosunku 1 : 2.

Rozpatrzmy trójkąt AOS. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa mamy:



$$\left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 8^2 = 10^2$$

$$\frac{a^2}{3} = 100 - 64$$

$$a^2 = 36 \cdot 3$$

Obliczamy pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36 \cdot 3 \cdot \sqrt{3}}{4} = 27\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^2]$$

Zatem objętość ostrosłupa: $V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 27\sqrt{3} \cdot 8 = 72\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^3]$.

Ćwiczenie 4

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 12 cm, a wysokość ściany bocznej – 15 cm.

Ćwiczenie 5

Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego wysokość jest równa 16 cm i tworzy:

a) z krawędzią boczną kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = 0{,}5$,

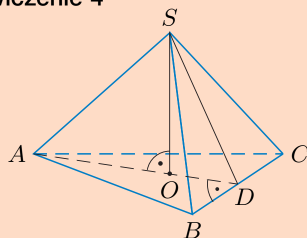
b) z wysokością ściany bocznej kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$.

Ćwiczenie 6

W ostrosłupie prawidłowym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę α, a krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość takiego ostrosłupa o podstawie:

a) kwadratu, b) trójkąta.

Ćwiczenie 4



a – długość krawędzi podstawy
$|OS| = 12$ cm, $|SD| = 15$ cm

$|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ cm

$|OD| = \frac{1}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$ cm

$12^2 + |OD|^2 = 15^2$,

czyli $|OD| = 9$ cm

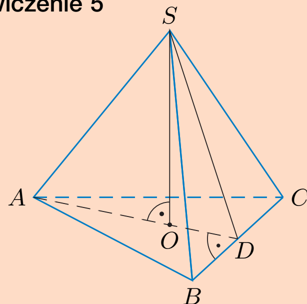
$|OD| = 9 = \frac{a\sqrt{3}}{6}$,

czyli $a = 18\sqrt{3}$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(18\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 12 =$

$= 972\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^3]$

Ćwiczenie 5



a – długość krawędzi podstawy
$|OS| = 16$ cm

a) $\frac{|AO|}{16} = 0{,}5$,

czyli $|AO| = 8$ cm

$|AO| = \frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 8$,

czyli $a = 8\sqrt{3}$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(8\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 16 =$

$= 256\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^3]$

b) $\frac{16}{|DS|} = 0{,}8$,

czyli $|DS| = 20$ cm

$16^2 + |OD|^2 = 20^2$,

czyli $|OD| = 12$ cm

$|OD| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 12$,

czyli $a = 24\sqrt{3}$ cm

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(24\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 16 =$

$= 2304\sqrt{3}\ [\mathrm{cm}^3]$

Ćwiczenie 6

H – wysokość ostrosłupa, b – długość krawędzi ściany bocznej

$\frac{\frac{a}{2}}{b} = \sin\frac{\alpha}{2}$, czyli $b = \frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$

a) $H^2 = \left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}\left(\frac{1}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 2\right) = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^2}{4} \cdot \frac{\cos\alpha}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$H = \frac{a\sqrt{\cos\alpha}}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$, $V = \frac{a^3}{6}\frac{\sqrt{\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

b) $H^2 = \left(\frac{a}{2\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^2 - \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{12}\left(\frac{3}{\sin^2\frac{\alpha}{2}} - 4\right) = \frac{a^2}{12} \cdot \frac{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{\sin^2\frac{\alpha}{2}}$

$H = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \frac{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{a^3\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}{24\sin\frac{\alpha}{2}}$

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru:

$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

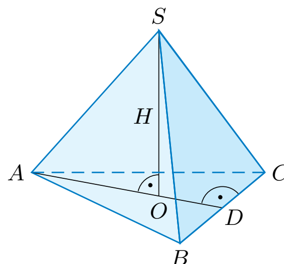
a jego objętość – za pomocą wzoru:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Dowód

Na rysunku poniżej przedstawiono czworościan foremny o krawędzi a.

Niech punkt O będzie spodkiem wysokości czworościanu. Rozpatrzmy trójkąt prostokątny AOS.



Zauważmy, że $|AO| = \frac{2}{3}|AD| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$ oraz $|AS| = a$.
Zatem na podstawie twierdzenia Pitagorasa:

$$H^2 = a^2 - \left(\frac{a\sqrt{3}}{3}\right)^2 = a^2 - \frac{1}{3}a^2 = \frac{2}{3}a^2$$

Stąd $H = \sqrt{\frac{2}{3}a^2} = \frac{a\sqrt{6}}{3}$ oraz objętość czworościanu:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Ćwiczenie 7

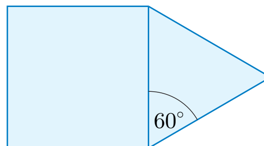
a) Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36\sqrt{3}$ cm^2.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej czworościanu foremnego o objętości równej $18\sqrt{2}$ cm^3.

Zadania

1. Wysokość ostrosłupa prawidłowego jest równa 15 cm, a obwód jego podstawy jest równy 24 cm. Oblicz objętość tego ostrosłupa, jeżeli jest on:
a) czworokątny, b) trójkątny, c) sześciokątny.

2. Na rysunku obok przedstawiono fragment siatki ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni całkowitej jest równe $36(1+\sqrt{3})$ cm^2. Oblicz objętość tego ostrosłupa.



3. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest trójkątem równoramiennym, w którym ramiona mają długość 13 cm i tworzą kąt α taki, że $\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{12}{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

4. Wyznacz objętość ostrosłupa prostego, którego wysokość tworzy z krawędzią boczną kąt α, a podstawą jest prostokąt o bokach a i $2a$.

Ćwiczenie 7

a) $4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}$,
stąd $a = 6$ [cm]
$V = \frac{6^3\sqrt{2}}{12} = 18\sqrt{2}$ [cm^3]

b) $V = 18\sqrt{2}$, zatem z podpunktu **a)** $P_c = 36\sqrt{3}$ [cm^2]

Odpowiedzi do zadań

1. a) $V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 15 = 180$ [cm^3]

b) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 =$
$= 80\sqrt{3}$ [cm^3]

c) $V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{4^2\sqrt{3}}{4} \cdot 15 =$
$= 120\sqrt{3}$ [cm^3]

2. a – długość każdej krawędzi ostrosłupa
$P_c = a^2 + 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} =$
$= a^2(1+\sqrt{3}) = 36(1+\sqrt{3})$,
czyli $a = 6$ cm
$H = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2} =$
$= \frac{\sqrt{2}}{2}a$, czyli $H = 3\sqrt{2}$ cm
$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} =$
$= 36\sqrt{2}$ [cm^3]

3. a – długość krawędzi podstawy
h_b – wysokość ściany bocznej
$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{h_b}{13} = \frac{12}{13}$, czyli $h_b = 12$ cm
$h_b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = 13^2$, czyli $a = 10$ cm
$H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = h_b^2$, czyli $H = \sqrt{12^2 - 5^2} = \sqrt{119}$ [cm]
$V = \frac{1}{3} \cdot 10^2 \cdot \sqrt{119} = \frac{100\sqrt{119}}{3}$ [cm^3]

4. d – przekątna podstawy, H – wysokość ostrosłupa
$d = \sqrt{(2a)^2 + a^2} = a\sqrt{5}$
$\frac{H}{\frac{d}{2}} = \operatorname{ctg}\alpha$, czyli $H = \frac{a\sqrt{5}}{2}\operatorname{ctg}\alpha$
$V = \frac{1}{3} \cdot 2a^2 \cdot \frac{a\sqrt{5}}{2}\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a^3\sqrt{5}}{3}\operatorname{ctg}\alpha$

5. Pole ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe S, a kąt płaski przy wierzchołku ma miarę 2α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

6. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przeciwprostokątnej równej 20 cm.

7. Suma długości krawędzi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego wynosi 21, a jego wysokość jest równa $\sqrt{13}$. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

8. Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego, którego wysokość jest dwa razy krótsza od wysokości jego ściany bocznej, a krawędź podstawy ma długość 6 cm.

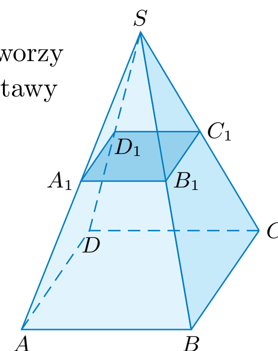
9. Oblicz objętość czworościanu foremnego, którego wysokość:
   a) jest równa 2 cm,
   b) jest o 1 cm krótsza od wysokości jego ściany.

10. Dany jest czworościan, w którym dwie skośne krawędzie mają długość 4 cm każda, a pozostałe krawędzie mają po 5 cm. Oblicz objętość tego czworościanu.

11. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest siedem razy większe od pola jego podstawy, a krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

12. Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z wysokością ściany bocznej kąt α. Krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

13. D Ostrosłup prawidłowy czworokątny o objętości V przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi bocznych (rysunek obok). Wykaż, że otrzymany ostrosłup ścięty $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ma objętość $\frac{7}{8}V$.



14. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe 18 cm², a jego krawędź boczna ma długość 10 cm. Ostrosłup przecięto płaszczyzną równoległą do płaszczyzny podstawy. Punkty, w których płaszczyzna przecięła krawędzie boczne ostrosłupa, są wierzchołkami kwadratu o polu 4 cm². Oblicz objętości wielościanów, na które płaszczyzna ta podzieliła ostrosłup.

---

5. a – krawędź podstawy
h – wysokość ściany bocznej
H – wysokość ostrosłupa
$\frac{\frac{a}{2}}{h} = \operatorname{tg}\alpha$, czyli $a = 2h \cdot \operatorname{tg}\alpha$
$\frac{1}{2}ah = h^2 \operatorname{tg}\alpha = S$, czyli
$h^2 = \frac{S}{\operatorname{tg}\alpha}$, stąd $a^2 = 4S\operatorname{tg}\alpha$
$H = \sqrt{h^2 - a^2} = \sqrt{\frac{S(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{\operatorname{tg}\alpha}}$
$V = \frac{1}{3}\cdot a^2 \cdot H =$
$= \frac{4}{3}S\sqrt{S\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}$

6. Kąt płaski przy wierzchołku: kąt prosty
Krawędź podstawy: 20 cm
Wysokość ściany bocznej: 10 cm
Wysokość ostrosłupa:
$\sqrt{10^2 - \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{20\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$
$= \frac{10\sqrt{6}}{3}$ [cm]
$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{20^2\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{10\sqrt{6}}{3} =$
$= \frac{1000\sqrt{2}}{3}$ [cm³]

7. a – krawędź podstawy
b – krawędź boczna
H – wysokość ostrosłupa
$3a + 3b = 21$, czyli $b = 7 - a$, gdzie $a \in (0; 7)$
$H^2 = b^2 - \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2$
$13 = 49 - 14a + a^2 - \frac{a^2}{3}$
$a^2 - 21a + 54 = 0$
$a = 3$ lub $a = 18 \notin (0; 7)$
$V = \frac{1}{3}\cdot\frac{3^2\sqrt{3}}{4}\cdot\sqrt{13} = \frac{3\sqrt{39}}{4}$

8. $V = \frac{1}{3}\cdot 6\cdot\frac{6^2\sqrt{3}}{4}\cdot 3 =$
$= 54\sqrt{3}$ [cm³]

9. a) $\sqrt{3}$ cm³
b) $2\sqrt{3}(140 + 99\sqrt{2})$ cm³

10. $\frac{8\sqrt{17}}{3}$ cm³

11. $\frac{\sqrt{35}}{24}a^3$

12. $\frac{a^3}{24\operatorname{tg}\alpha}$

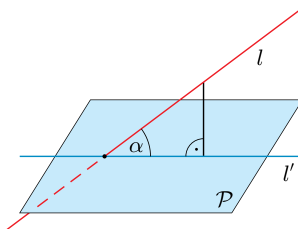
13. a – długość krawędzi podstawy
H – wysokość ostrosłupa $ABCDS$
Wówczas $V = \frac{1}{3}a^2H$.
Długość krawędzi ostrosłupa $A_1B_1C_1D_1S$ jest równa $\frac{1}{2}a$, a jego wysokość wynosi $\frac{1}{2}H$.
Objętość tego ostrosłupa:
$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\frac{H}{2} = \frac{1}{3}\cdot a^2\cdot\frac{H}{8} = \frac{1}{8}V$
Zatem objętość ostrosłupa ściętego jest równa:
$V - \frac{1}{8}V = \frac{7}{8}V$

14. Długość krawędzi podstawy ostrosłupa: $3\sqrt{2}$ cm
H – wysokość ostrosłupa
$H^2 + \left(\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\right)^2 = 10^2$, czyli $H = \sqrt{91}$ cm
Wówczas $V = \frac{1}{3}\cdot 18\sqrt{91} = 6\sqrt{91}$ [cm³].
Długość krawędzi ostrosłupa odciętego jest równa 2 cm, a jego wysokość wynosi $\frac{2}{3\sqrt{2}}H = \frac{\sqrt{182}}{3}$.
Wówczas objętość ostrosłupa odciętego jest równa $\frac{1}{3}\cdot 4\cdot\frac{\sqrt{182}}{3} = \frac{4}{9}\sqrt{182}$ [cm³].
Objętość ostrosłupa ściętego jest równa:
$\frac{54\sqrt{91}}{9} - \frac{4\sqrt{182}}{9} = \frac{2\sqrt{91}}{9}(27 - \sqrt{2}) = \sqrt{182}\left(3\sqrt{2} - \frac{4}{9}\right)$ [cm³]

*2.7. Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

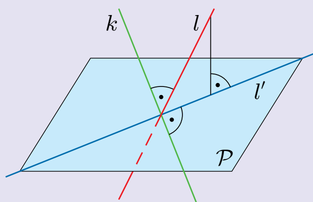
Prostą l, która ma z płaszczyzną $\mathcal{P}$ jeden punkt wspólny i nie jest do tej płaszczyzny prostopadła, nazywamy prostą **pochyłą** do płaszczyzny $\mathcal{P}$.

Prosta l, pochyła do płaszczyzny $\mathcal{P}$, tworzy z prostą l' będącą jej rzutem prostokątnym na płaszczyznę $\mathcal{P}$ kąt $\alpha \in (0°; 90°)$ (rysunek obok).



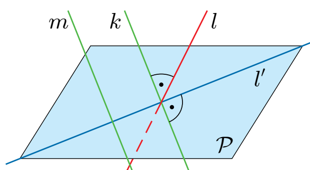
Twierdzenie o trzech prostych prostopadłych

Prosta k zawarta w płaszczyźnie $\mathcal{P}$ jest prostopadła do prostej l pochyłej do płaszczyzny $\mathcal{P}$ wtedy i tylko wtedy, gdy jest prostopadła do prostej l' będącej rzutem prostokątnym prostej l na płaszczyznę $\mathcal{P}$.



Dowód – patrz zadanie 9 na stronie 111.

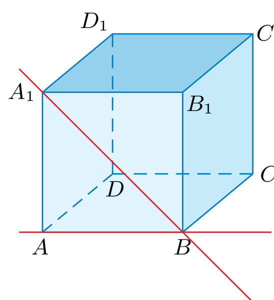
Zauważmy, że jeśli prosta k (rysunek obok) jest prostopadła do prostej l, to każda prosta równoległa do prostej k jest również prostopadła do prostej l.



Ćwiczenie 1

D a) Prosta AB jest rzutem prostokątnym prostej A_1B na płaszczyznę zawierającą podstawę $ABCD$ sześcianu (rysunek obok). Które proste przechodzące przez dwa wierzchołki tej podstawy są prostopadłe do prostej A_1B? Odpowiedź uzasadnij.

b) Które proste przechodzące przez dwa wierzchołki tego sześcianu są prostopadłe do prostej BD_1?



D Ćwiczenie 2

Uzasadnij, że prosta zawierająca krawędź boczną ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest prostopadła do prostej zawierającej jedną z przekątnych podstawy tego ostrosłupa.

Uczeń:
- stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych do uzasadnienia prostopadłości prostych,
- stosuje twierdzenie o trzech prostych prostopadłych do rozwiązywania zadań ze stereometrii,
- przeprowadza dowód twierdzenia o trzech prostych prostopadłych.

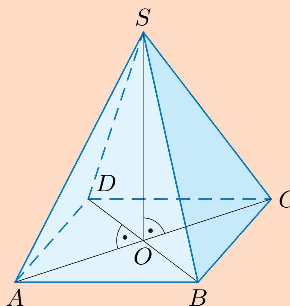
Ćwiczenie 1

a) Proste BC i AD są prostopadłe do prostej AB, więc na podstawie twierdzenia o trzech prostych prostopadłych są prostopadłe do prostej A_1B.

b) AC, A_1C_1, AB_1, CB_1, A_1D, C_1D

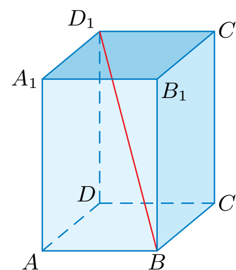
Ćwiczenie 2

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Rzutem prostokątnym prostej AS na płaszczyznę podstawy jest prosta zawierająca przekątną AC. Podstawą ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat, a jego przekątne są prostopadłe. Zatem na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych prosta zawierająca przekątną BD jest prostopadła do prostej zawierającej krawędź boczną AS.



Zadania

D **1.** Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny niebędący sześcianem (rysunek obok). Uzasadnij, że jego przekątna BD_1:



a) jest prostopadła do prostej AC,

b) nie jest prostopadła do prostej B_1C.

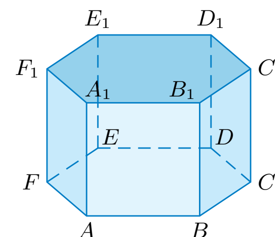
D **2.** Uzasadnij, że proste zawierające skośne krawędzie ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są prostopadłe.

3. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat $ABCD$, a krawędź boczna AS jest jego wysokością.

D a) Wykaż, że wszystkie ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami prostokątnymi.

b) Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa, jeśli wiadomo, że jego wysokość jest równa 3, a krawędź podstawy ma długość 4.

4. Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny (rysunek obok). Rozpatrzmy proste wyznaczone przez dwa punkty wybrane spośród punktów A, B, C, D, E, F. Które z tych prostych są prostopadłe do prostej:

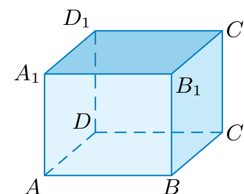


a) BF_1, b) BE_1, c) BC_1, d) BB_1?

5. Dany jest graniastosłup prawidłowy ośmiokątny. Ile jest prostych wyznaczonych przez dwa wierzchołki dolnej podstawy tego graniastosłupa oraz prostopadłych do jego najdłuższej przekątnej?

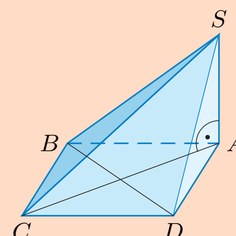
D **6.** Dany jest graniastosłup prawidłowy pięciokątny. Uzasadnij, że przekątna tego graniastosłupa nie jest prostopadła do żadnej prostej wyznaczonej przez dwa wierzchołki jego podstawy.

7. Dany jest prostopadłościan o krawędziach podstawy $|AB| = 5$ cm i $|BC| = 3$ cm oraz wysokości 4 cm (rysunek obok). Czy któreś dwie spośród przekątnych tego prostopadłościanu są do siebie prostopadłe?



8. Podstawą graniastosłupa prostego jest trapez równoramienny o wysokości $\sqrt{3}$ cm i kącie ostrym $60°$. Przekątna tego graniastosłupa jest prostopadła do jednej z krawędzi. Oblicz pole jego podstawy.

3. a) Wysokość AS jest prostopadła do płaszczyzny podstawy, stąd ΔDAS i ΔBAS są prostokątne.
Prosta AD jest rzutem prostokątnym prostej SD na płaszczyznę podstawy. Podstawą ostrosłupa $ABCDS$ jest kwadrat, stąd proste zawierające boki AD i CD są prostopadłe. Zatem na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych $CD \perp SD$, czyli ΔCDS jest prostokątny.
Analogicznie wykazujemy, że ΔCBS jest prostokątny.

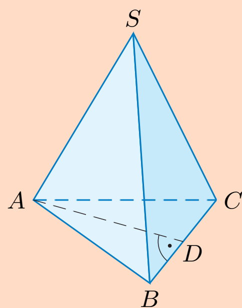


6. Rzutem prostokątnym przekątnej graniastosłupa prawidłowego pięciokątnego na płaszczyznę podstawy jest jedna z przekątnych podstawy. Zauważmy, że w pięciokącie foremnym żadna z przekątnych nie jest prostopadła ani do innej przekątnej, ani do boku pięciokąta. Zatem żadna z tych prostych nie może być prostopadła do przekątnej graniastosłupa.

Odpowiedzi do zadań

1. a) Prosta BD jest rzutem prostokątnym prostej BD_1 na płaszczyznę podstawy. Proste $A \perp BD$ (przekątne kwadratu są prostopadłe). Zatem na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych $BD_1 \perp AC$.
b) Prosta BC_1 jest rzutem prostokątnym prostej BD_1 na płaszczyznę BCC_1B_1. Proste BC_1 i B_1C są przekątnymi prostokąta BCC_1B_1 niebędącego kwadratem, więc nie przecinają się pod kątem prostym, stąd proste BD_1 i B_1C nie są prostopadłe.

2. Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku. Proste AS i BC zawierają skośne krawędzie.



Prosta AD jest rzutem prostokątnym prostej AS na płaszczyznę podstawy. Prosta AD jest wysokością trójkąta równobocznego ABC, zatem jest prostopadła do prostej zawierającej krawędź BC. Stąd na mocy twierdzenia o trzech prostych prostopadłych $AS \perp BC$.

3. b) 48

4. a) AD, BC, EF
b) AC, DF
c) BF, CE
d) AB, AC, AD, AE, AF, BC, BD, BE, BF, CD, CE, CF, DE, DF, EF

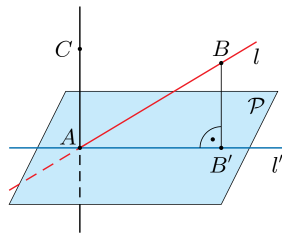
5. 3

7. tak, $AC_1 \perp BD_1$, $A_1C \perp B_1D$

8. $3\sqrt{3}$ cm^2

D **9.** Przeczytaj dowód twierdzenia o trzech prostych prostopadłych. Podaj, z jakiego twierdzenia korzystamy w miejscach oznaczonych ?.

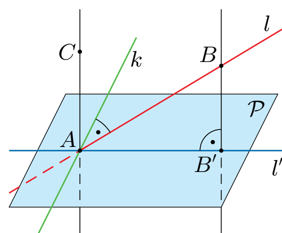
Rozpatrzmy prostą l pochyłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$ i przecinającą ją w punkcie A oraz prostą l' będącą rzutem prostokątnym prostej l na tę płaszczyznę (rysunek obok). Na prostej l wybieramy punkt B różny od punktu A. Niech B' będzie rzutem prostokątnym punktu B na płaszczyznę $\mathcal{P}$.



Przez punkt A prowadzimy prostą AC prostopadłą do płaszczyzny $\mathcal{P}$ (zauważmy, że proste AC i BB' są równoległe).

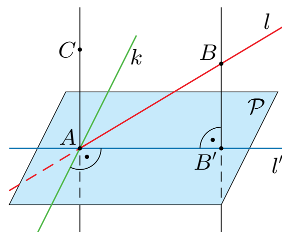
- Zakładamy, że prosta k zawarta w płaszczyźnie $\mathcal{P}$ jest prostopadła do prostej l (rysunek poniżej) i pokażemy, że jest wtedy prostopadła do prostej l'.

Prosta k jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie, do której należą punkty A, B, B' i C – są to proste AB i AC. Zatem na podstawie twierdzenia ?, prosta k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie, w szczególności do prostej l'.



- Zakładamy, że prosta k zawarta w płaszczyźnie $\mathcal{P}$ jest prostopadła do prostej l' (rysunek poniżej) i pokażemy, że jest wtedy prostopadła do prostej l.

Prosta k jest prostopadła do dwóch nierównoległych prostych zawartych w płaszczyźnie, do której należą punkty A, B', B i C – są to proste AB' i AC. Zatem na podstawie twierdzenia ?, prosta k jest prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie, w szczególności do prostej l.



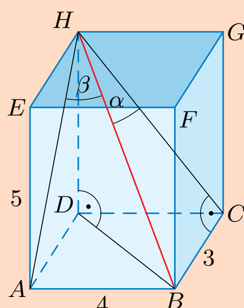
9. Twierdzenie o prostej prostopadłej do płaszczyzny (patrz str. 88)

2.8. Kąt między prostą a płaszczyzną

Uczeń:
– wskazuje i wyznacza kąty między odcinkami w graniastosłupie a płaszczyzną jego podstawy lub ścianą boczną,
– wskazuje i wyznacza kąty między odcinkami w ostrosłupie a płaszczyzną jego podstawy,
– rozwiązuje zadania dotyczące miary kąta między prostą a płaszczyzną (również z wykorzystaniem trygonometrii).

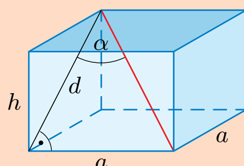
Ćwiczenie 1
30°, około 27°

Ćwiczenie 2

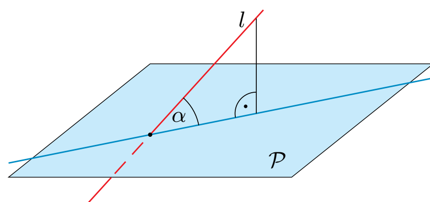


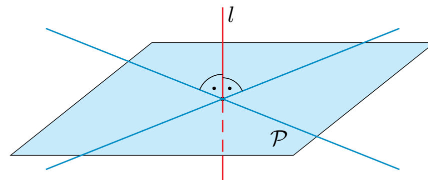
$|BD| = 5$ cm
$|BH| = 5\sqrt{2}$ cm
$\sin\alpha = \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10}$
$\sin\beta = \frac{4}{5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{5}$

Ćwiczenie 3



$d = \frac{a}{\operatorname{tg}\alpha}$
$h = \sqrt{d^2 - a^2} =$
$= \sqrt{a^2\left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2\alpha} - 1\right)} = a\frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}$
Objętość graniastosłupa:
$V = \frac{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}{\operatorname{tg}\alpha}a^3$
$V > 0$, gdy $\operatorname{tg}^2\alpha < 1$
$\operatorname{tg}\alpha < 1$ i $\operatorname{tg}\alpha > -1$ oraz
$\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, czyli $\alpha \in (0^\circ; 45^\circ)$

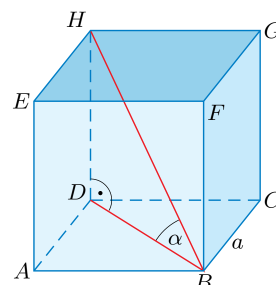




Kątem między prostą a płaszczyzną nazywamy kąt ostry, który ta prosta tworzy ze swoim rzutem prostokątnym na tę płaszczyznę. Jeśli rzutem prostej jest punkt, to przyjmujemy, że płaszczyzna i prosta tworzą kąt prosty. Jeśli prosta jest równoległa do płaszczyzny, to tworzy z nią kąt 0°.

Przykład 1

Wyznacz miarę kąta między przekątną sześcianu a jego podstawą.



Rozpatrzmy przekątną sześcianu BH (rysunek obok) i jej rzut prostokątny na płaszczyznę podstawy – odcinek BD.
Jeśli $|DH| = a$, to $|BD| = a\sqrt{2}$, zatem:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{a\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7071, \text{ stąd } \alpha \approx 35^\circ$$

Ćwiczenie 1

Dany jest graniastosłup prawidłowy sześciokątny, którego wszystkie krawędzie mają tę samą długość. Wyznacz miary kątów, które jego przekątne tworzą z podstawą.

Ćwiczenie 2

Podstawą graniastosłupa prostego o wysokości 5 cm jest prostokąt o bokach długości 3 cm i 4 cm. Oblicz sinusy kątów, które przekątna tego graniastosłupa tworzy z jego ścianami bocznymi.

D **Ćwiczenie 3**

Przekątna graniastosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy ze ścianą boczną kąt α, a krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego graniastosłupa. Uzasadnij, że zadanie ma rowiązanie dla $\alpha < 45^\circ$.

D **Ćwiczenie 4**

Przekątna ściany bocznej graniastosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość d i tworzy z sąsiednią ścianą boczną kąt α. Wyznacz wysokość tego graniastosłupa. Uzasadnij, że zadanie ma rowiązanie dla $\alpha < 60^\circ$.

Ćwiczenie 4

a – długość krawędzi podstawy

$\frac{\frac{a\sqrt{3}}{2}}{d} = \sin\alpha$, czyli $a = \frac{2\sqrt{3}d\sin\alpha}{3}$

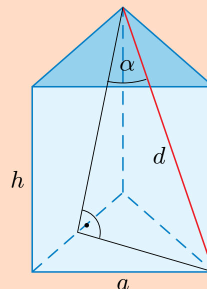
$h^2 = d^2 - a^2 = d^2\left(1 - \frac{4\sin^2\alpha}{3}\right)$

$h = d\sqrt{1 - \frac{4\sin^2\alpha}{3}}$

$h > 0$, gdy $1 - \frac{4}{3}\sin^2\alpha > 0$

$\sin^2\alpha < \frac{3}{4}$

$\sin\alpha < \frac{\sqrt{3}}{2}$ i $\sin\alpha > -\frac{\sqrt{3}}{2}$ oraz $\alpha \in (0^\circ; 90^\circ)$, czyli $\alpha \in (0^\circ; 60^\circ)$

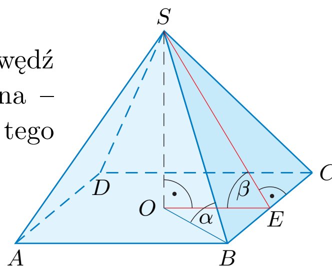


Przykład 2

W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

a) jego krawędź boczna,

b) wysokość jego ściany bocznej.



a) Kąt między krawędzią boczną SB ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OB) oznaczono na rysunku przez α. Odcinek OB jest połową przekątnej kwadratu o boku 10 cm, więc $|OB| = 5\sqrt{2}$ cm.

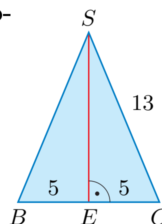
Rozpatrzmy trójkąt OBS:

$$\cos\alpha = \frac{|OB|}{|BS|} = \frac{5\sqrt{2}}{13}$$

b) Kąt między wysokością SE ściany bocznej ostrosłupa a jej rzutem prostokątnym na podstawę (odcinek OE) oznaczono przez β. Na rysunku poniżej przedstawiono ścianę boczną ostrosłupa – jest to trójkąt równoramienny o wysokości SE. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa otrzymujemy: $|SE|^2 = 13^2 - 5^2 = 144$, skąd $|SE| = 12$ cm.

Rozpatrzmy trójkąt OES:

$$\cos\beta = \frac{|OE|}{|SE|} = \frac{5}{12}$$

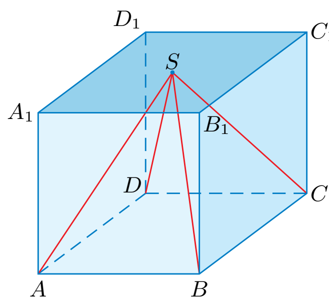


Ćwiczenie 5

Dolną podstawą sześcianu jest kwadrat $ABCD$. Punkt S jest punktem przecięcia przekątnych kwadratu $A_1B_1C_1D_1$ będącego górną podstawą sześcianu. Rozpatrzmy ostrosłup o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S. Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy:

a) jego krawędź boczna,

b) wysokość jego ściany bocznej.



Ćwiczenie 5

a – długość krawędzi sześcianu

a) $|AS|^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\sqrt{2}\right)^2 =$
$= \frac{3}{2}a^2$, czyli $|AS| = \frac{\sqrt{6}}{2}a$

$\sin\alpha = \frac{a}{\frac{\sqrt{6}}{2}a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

b) $h_b^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$,
czyli $h_b = \frac{\sqrt{5}}{2}a$

$\sin\beta = \frac{a}{\frac{\sqrt{5}}{2}a} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

Ćwiczenie 6

a) Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna czworościanu foremnego tworzy z jego podstawą.

b) Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego pole powierzchni bocznej jest sześć razy większe od pola podstawy. Oblicz sinus kąta, który krawędź boczna tego ostrosłupa tworzy z jego podstawą.

Ćwiczenie 6

a) a – długość krawędzi czworościanu

Wysokość czworościanu foremnego o krawędzi a: $H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$

$\sin\alpha = \frac{\frac{a\sqrt{6}}{3}}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

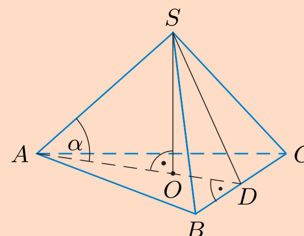
b) a – długość krawędzi podstawy, b – długość krawędzi ściany bocznej,
h_b – wysokość ściany bocznej, H – wysokość ostrosłupa

$3 \cdot \frac{1}{2} \cdot ah_b = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, czyli $h_b = a\sqrt{3}$

$H^2 = h_b^2 - \left(\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{35a^2}{12}$, czyli $H = \frac{a}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}$

$b^2 = H^2 + \left(\frac{2}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{39a^2}{12}$, czyli $b = \frac{a}{2}\sqrt{13}$

$\sin\alpha = \frac{H}{b} = \frac{\frac{a}{2}\sqrt{\frac{35}{3}}}{\frac{a}{2}\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{35}{39}} = \frac{\sqrt{1365}}{39}$

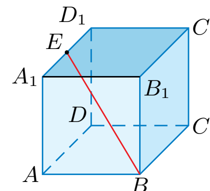


Zadania

1. Dany jest prostopadłościan o krawędziach długości 2 cm, 3 cm i $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątną tego prostopadłościanu a jego ścianą o największym polu.

2. W sześcianie (rysunek obok) punkt E jest środkiem krawędzi A_1D_1. Oblicz sinus kąta, który odcinek BE tworzy:

a) ze ścianą ABB_1A_1, b) z podstawą $ABCD$.



D **3.** Przekątna prostopadłościanu tworzy z jego ścianami mającymi wspólny wierzchołek kąty α, β i γ. Wykaż, że $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 2$.

4. a) Wysokość ściany bocznej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz sinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy jego krawędź boczna.

b) Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego tworzy z podstawą kąt 60°. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą tego ostrosłupa tworzy wysokość jego ściany bocznej.

5. Pole podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równe P, a kąt między wysokością ściany bocznej a podstawą ma miarę α. Wyznacz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa.

6. Dany jest ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a i objętości równej $\frac{a^3\sqrt{3}}{12}$. Oblicz cosinus kąta, który z podstawą ostrosłupa tworzy:

a) krawędź boczna, b) wysokość ściany bocznej.

7. Uzasadnij, że jeżeli wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem, to spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu opisanego na jego podstawie.

8. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt o bokach 6, 8 i 10, a wszystkie krawędzie boczne mają długość 13. Oblicz cosinusy kątów, które z podstawą tego ostrosłupa tworzą jego krawędzie boczne.

9. Podstawą ostrosłupa jest trójkąt równoramienny, którego ramiona mają długość a, a miara kąta między ramionami jest równa α. Wszystkie krawędzie boczne tego ostrosłupa są nachylone do podstawy pod kątem β. Wyznacz jego objętość.

7. Rozpatrzmy ostrosłup z n-kątem w podstawie. Krawędzie ścian bocznych tworzą z wysokością H ostrosłupa trójkąty prostokątne, gdzie krawędzie ścian bocznych są przeciwprostokątnymi, a wysokość ostrosłupa – przyprostokątną. Oznaczmy drugą przyprostokątną x_i, gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots, n$.
Z warunków zadania wiadomo, że wszystkie krawędzie boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem α, czyli:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{x_1} = \frac{H}{x_2} = \ldots = \frac{H}{x_n}$$

stąd wynika, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, czyli spodek wysokości jest równo odległy od wszystkich wierzchołków n-kąta, co oznacza, że jest on środkiem okręgu opisanego na tym n-kącie.

Odpowiedzi do zadań

1. $2 < 3 < 2\sqrt{3}$
d – długość przekątnej prostopadłościanu
$d^2 = (2\sqrt{3})^2 + (2^2 + 3^2) =$
$= 25$, czyli $d = 5$ cm
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{3^2+(2\sqrt{3})^2}}{d} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

2. a – długość krawędzi sześcianu
$|BE|^2 = |A_1B|^2 + |A_1E|^2$
$|BE|^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 =$
$= \frac{9a^2}{4}$, czyli $|BE| = \frac{3a}{2}$

a) $\sin\alpha = \frac{|EA_1|}{|EB|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{3}{2}a} = \frac{1}{3}$

b) E' – środek odcinka AD
$\sin\alpha = \frac{|EE'|}{|EB|} = \frac{a}{\frac{3}{2}a} = \frac{2}{3}$

3. a, b, c – długości krawędzi prostopadłościanu
d – długość przekątnej prostopadłościanu
$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$
$\cos\alpha = \frac{\sqrt{a^2+c^2}}{d}$
$\cos\beta = \frac{\sqrt{b^2+c^2}}{d}$
$\cos\gamma = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{d}$
$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma =$
$= \frac{a^2+c^2}{d^2} + \frac{b^2+c^2}{d^2} + \frac{a^2+b^2}{d^2} =$
$= \frac{2(a^2+b^2+c^2)}{d^2} = \frac{2d^2}{d^2} = 2$

4. a – długość krawędzi podstawy
b – długość krawędzi bocznej
H – wysokość ostrosłupa

a) $H = \frac{a}{2} \cdot \operatorname{tg}60^\circ = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
$b = \sqrt{H^2 + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2} =$
$= \sqrt{\frac{3}{4}a^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{a}{2}\sqrt{5}$
$\sin\alpha = \frac{H}{b} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}$

b) $\frac{\sqrt{7}}{7}$

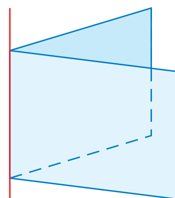
5. $P_c = P\left(1 + \frac{1}{\cos\alpha}\right)$
$V = \frac{1}{6}P\sqrt{P}\operatorname{tg}\alpha$

6. **a)** $\frac{1}{2}$ **b)** $\frac{\sqrt{13}}{13}$

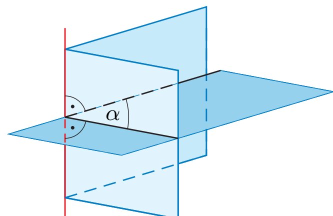
8. $\frac{5}{13}$

9. $\frac{1}{6}a^3 \sin\frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\beta$

2.9. Kąt dwuścienny



Dwie półpłaszczyzny o wspólnej krawędzi dzielą przestrzeń na dwie części. Każdą z tych części, łącznie z półpłaszczyznami, nazywamy **kątem dwuściennym**, półpłaszczyzny – **ścianami** tego kąta, a wspólną krawędź półpłaszczyzn – jego **krawędzią**.

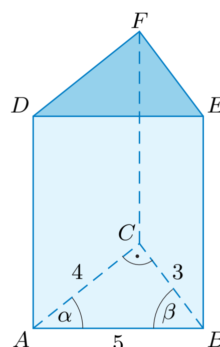


Miarą kąta dwuściennego nazywamy miarę kąta płaskiego otrzymanego jako przekrój kąta dwuściennego płaszczyzną prostopadłą do jego krawędzi.

W dalszym ciągu, kiedy będziemy mówić o kącie dwuściennym, będziemy rozważać ten z kątów między półpłaszczyznami, który ma mniejszą miarę.

Przykład 1

Dany jest graniastosłup prosty trójkątny, którego podstawą jest trójkąt prostokątny o bokach długości 3, 4 i 5. Podaj miary kątów, które tworzą ze sobą ściany boczne tego graniastosłupa.



Ściany $BCFE$ i $ACFD$ tworzą kąt prosty.

Ściany $ABED$ i $ACFD$ tworzą kąt α taki, że:

$$\sin\alpha = \frac{3}{5}, \text{ więc } \alpha \approx 37^\circ$$

Ściany $ABED$ i $BCFE$ tworzą kąt $\beta = 90^\circ - \alpha \approx 53^\circ$.

Ćwiczenie 1

Podaj miarę kąta utworzonego przez dwie sąsiednie ściany boczne graniastosłupa prawidłowego:

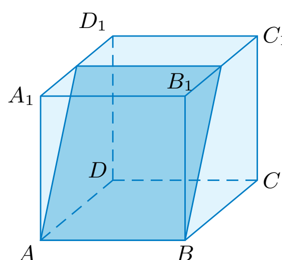
a) trójkątnego, b) pięciokątnego, c) sześciokątnego.

Ćwiczenie 2

Oblicz cosinus kąta, który z płaszczyzną podstawy $ABCD$ sześcianu tworzy płaszczyzna przechodząca przez wierzchołki A i B oraz:

a) środki krawędzi A_1D_1 i B_1C_1 (rysunek obok),

b) środki krawędzi DD_1 i CC_1.



Uczeń:

– wskazuje kąt między sąsiednimi ścianami wielościanów,

– wyznacza kąt między sąsiednimi ścianami wielościanów,

– rozwiązuje zadania dotyczące miary kąta dwuściennego.

Ćwiczenie 1

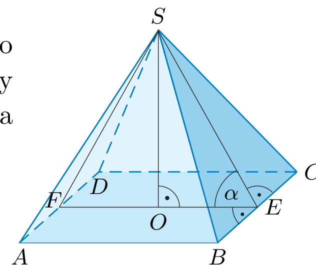
a) 60° **b)** 108° **c)** 120°

Ćwiczenie 2

a) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **b)** $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

Przykład 2

Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego wysokość jest równa $5\sqrt{3}$, a krawędź podstawy ma długość 10. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku obok.
Zauważmy, że proste FE i SE są prostopadłe do BC – krawędzi kąta dwuściennego zawartego między ścianą boczną a podstawą ostrosłupa, czyli miara tego kąta jest miarą kąta płaskiego FES.
Zatem szukamy miary kąta α w trójkącie OES:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|OS|}{|OE|} = \frac{5\sqrt{3}}{5} = \sqrt{3}, \text{ czyli } \alpha = 60^\circ$$

Ćwiczenie 3

a) Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 12 cm, a jego wysokość jest równa $2\sqrt{3}$ cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Przekątna podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6 cm. Ściana boczna tego ostrosłupa jest nachylona do jego podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

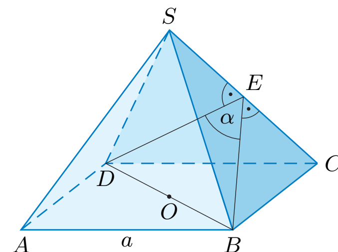
Ćwiczenie 3

a) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}$,
czyli $\alpha = 30^\circ$

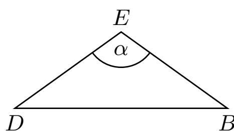
b) $|AB| \cdot \sqrt{2} = 6$,
czyli $|AB| = 3\sqrt{2}$ cm
$\alpha = 45^\circ$, zatem
$|OS| = |OE| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm
$V = \frac{1}{3} \cdot \left(3\sqrt{2}\right)^2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} = 9\sqrt{2}$ [cm³]

Przykład 3

Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego czworokątnego są trójkątami równobocznymi. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.



Szukamy cosinusa kąta BED, gdzie E jest wierzchołkiem kąta płaskiego otrzymanego przez przekrój płaszczyzną prostopadłą do krawędzi kąta dwuściennego zawartego między sąsiednimi ścianami ostrosłupa.
Oznaczmy długość krawędzi ostrosłupa przez a.
Wówczas przekątna podstawy $|DB| = a\sqrt{2}$.
Odcinek EB jest wysokością trójkąta równobocznego BCS o boku a, zatem $|EB| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Podobnie $|ED| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE:

$$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cos\alpha \;\; / : a^2$$

$$2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} - 2 \cdot \frac{3}{4}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = -\frac{1}{3}$$

Zauważ, że $\cos\alpha < 0$, więc α jest kątem rozwartym.

Ćwiczenie 4

Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od jego krawędzi podstawy. Oblicz cosinus kąta, który tworzą dwie sąsiednie ściany boczne tego ostrosłupa.

Przykład 4

Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego tworzy z podstawą kąt α (rysunek poniżej). Krawędź podstawy ma długość a. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Trójkąt ABC jest trójkątem równobocznym, a punkt O jest środkiem opisanego na nim okręgu, zatem:

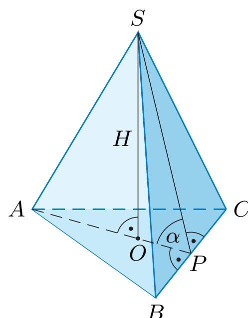
$$|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad \text{oraz} \quad |OP| = \frac{1}{3}|AP| = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

Wyznaczamy wysokość ostrosłupa:

$$H = |OP| \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$

Zatem objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{6} \cdot \operatorname{tg}\alpha = \frac{a^3}{24} \cdot \operatorname{tg}\alpha$$



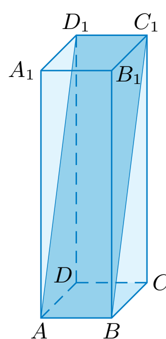
Ćwiczenie 5

Wysokość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa H, a ściana boczna tworzy z podstawą kąt α. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

Zadania

1. Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt prostokątny o przyprostokątnych długości 7 cm i 24 cm. Oblicz miary kątów zawartych między sąsiednimi ścianami bocznymi tego graniastosłupa.

2. Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny, którego pole powierzchni bocznej jest równe 480 cm^2, a pole powierzchni całkowitej – 530 cm^2. Oblicz sinus kąta, który tworzy płaszczyzna zawierająca krawędzie AB i C_1D_1 tego graniastosłupa (rysunek obok) z jego podstawą.



3. a) Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $72\sqrt{3}$ cm^3, a jego wysokość jest równa 2 cm. Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

b) Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego krawędź podstawy ma długość 10 cm, a krawędź boczna – 13 cm.

Ćwiczenie 4

$h_1^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (2a)^2$, czyli $h_1 = \frac{a\sqrt{15}}{2}$

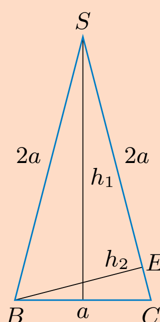
Dla trójkąta BCS mamy: $\frac{1}{2}ah_1 = \frac{1}{2} \cdot 2ah_2$, czyli $h_2 = \frac{a\sqrt{15}}{4}$.

Korzystamy z twierdzenia cosinusów dla trójkąta DBE:

$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2 - 2 \cdot \left(\frac{a\sqrt{15}}{4}\right)^2 \cdot \cos\alpha$

$2 = \frac{15}{8}(1 - \cos\alpha)$

$\cos\alpha = -\frac{1}{15}$



Ćwiczenie 5

a – krawędź podstawy

$|OP| = \frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$\frac{H}{|OP|} = \operatorname{tg}$, czyli $\alpha|OP| = \frac{H}{\operatorname{tg}\alpha}$

$a = \frac{2\sqrt{3}H}{\operatorname{tg}\alpha}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{2\sqrt{3}H}{\operatorname{tg}\alpha}\right)^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{H^3\sqrt{3}}{\operatorname{tg}^2\alpha}$

Odpowiedzi do zadań

1. 90°, około 74°, około 16°

2. $|BC| = 5$ cm, $|CC_1| = 24$ cm

$\sin\alpha = \frac{24}{\sqrt{601}} = \frac{24\sqrt{601}}{601}$

3. a – długość krawędzi podstawy ostrosłupa

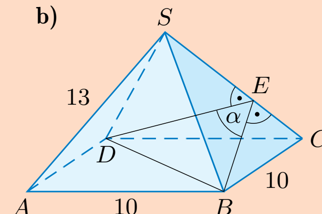
a) $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot 2 = 72\sqrt{3}$,

czyli $a = \sqrt{432} = 12\sqrt{3}$ [cm]

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{\frac{a\sqrt{3}}{6}} = \frac{1}{3}$,

więc $\alpha \approx 18^\circ$

b)



$|BD| = 10\sqrt{2}$

Wysokość ściany bocznej:

$h = \sqrt{13^2 - 5^2} = 12$

Z pola ściany bocznej:

$\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 12 = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot |BE|$,

czyli $|BE| = \frac{120}{13} = |DE|$

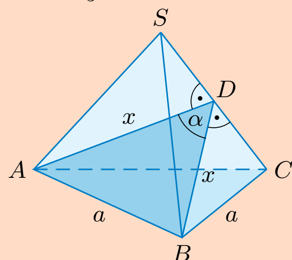
Z twierdzenia cosinusów:

$(10\sqrt{2})^2 = \left(\frac{120}{13}\right)^2 + \left(\frac{120}{13}\right)^2 +$
$-2 \cdot \frac{120}{13} \cdot \frac{120}{13} \cos\alpha$

$\cos\alpha = -\frac{25}{144}$

4. $\cos\alpha = \frac{\sqrt{6}}{3}$

5.



Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku.
Z twierdzenia cosinusów:
$a^2 = x^2 + x^2 - 2x^2 \cdot \frac{1}{3}$
$x^2 = \frac{3}{4}a^2$, czyli $x = \frac{\sqrt{3}}{2}a$
$\sin \sphericalangle BCD = \frac{x}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$,
czyli $\sphericalangle BCD = 60^\circ$
Ściany boczne graniastosłupa prawidłowego są trójkątami równoramiennymi, stąd
$\sphericalangle CBS = \sphericalangle BCD = 60^\circ$,
co oznacza, że $\sphericalangle BSC = 60^\circ$.
Zatem ściany boczne tego ostrosłupa są trójkątami równobocznymi o boku a, czyli ostrosłup jest czworościanem foremnym.

6. $\frac{5}{2}$

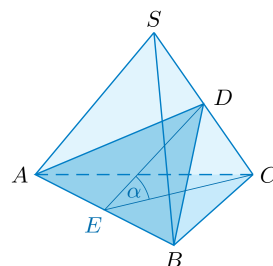
7. Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta ABS:
$a^2 = b^2 + b^2 - 2b^2 \cdot \frac{7}{25}$
$a^2 = \frac{36}{25}b^2$, czyli $b = \frac{5}{6}a$
$\cos\alpha = \frac{7}{25}$, więc $\sin\alpha = \frac{24}{25}$
Niech $x = |DE| = |BE|$.
Dla trójkąta BES mamy:
$\frac{x}{b} = \sin\alpha = \frac{24}{25}$, czyli
$x = \frac{24}{25}b = \frac{4}{5}a$
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BED:
$(a\sqrt{2})^2 = \left(\frac{4}{5}a\right)^2 + \left(\frac{4}{5}a\right)^2 +$
$-2\left(\frac{4}{5}a\right)^2 \cdot \cos \sphericalangle BED$
$2a^2 = \frac{16}{25}a^2 + \frac{16}{25}a^2 +$
$-2 \cdot \frac{16}{25}a^2 \cdot \cos \sphericalangle BED$
$\frac{18}{25} = -\frac{32}{25} \cdot \cos \sphericalangle BED$
$\cos \sphericalangle BED = -\frac{18}{32} = -\frac{9}{16}$

8. $\frac{7}{32}$

9. $\sqrt{2(\operatorname{ctg}^2\alpha - 1)}$

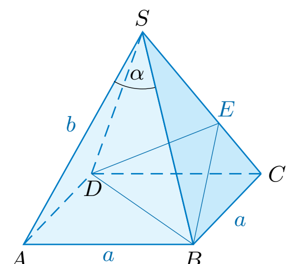
10. $-\frac{7}{8}$

4. Dany jest czworościan foremny $ABCS$ (rysunek obok). Punkt D jest środkiem krawędzi CS. Oblicz cosinus kąta zawartego między płaszczyzną ABD a płaszczyzną zawierającą podstawę ABC tego ostrosłupa.



D **5.** Cosinus kąta zawartego między ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równy $\frac{1}{3}$. Uzasadnij, że jest to czworościan foremny.

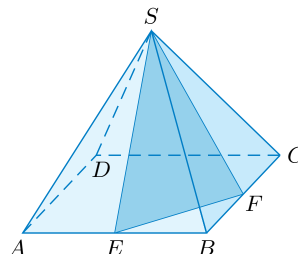
6. Objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa $20\sqrt{3}$ cm^3, a koło opisane na jego podstawie ma pole równe 16π cm^2. Oblicz tangens kąta zawartego między ścianą boczną tego ostrosłupa a jego podstawą.



D **7.** W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę α (rysunek obok). Wykaż, że jeśli $\cos\alpha = \frac{7}{25}$, to cosinus kąta zawartego między dwoma sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa jest równy $-\frac{9}{16}$.

8. W ostrosłupie prawidłowym trójkątnym kąt płaski przy wierzchołku ma miarę α oraz $\cos\alpha = \frac{7}{25}$. Oblicz cosinus kąta zawartego między dwoma sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

9. Kąt płaski przy wierzchołku ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 2α. Punkty E i F są środkami krawędzi podstawy odpowiednio AB i BC (rysunek obok). Wyznacz tangens kąta zawartego między podstawą tego ostrosłupa a płaszczyzną, do której należą punkty E, F i S.



10. W podstawę ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości 6 wpisano okrąg o promieniu $6\sqrt{3}$. Oblicz cosinus kąta zawartego między sąsiednimi ścianami bocznymi tego ostrosłupa.

11. D Uzasadnij, że jeżeli wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem, to spodek wysokości tego ostrosłupa jest środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

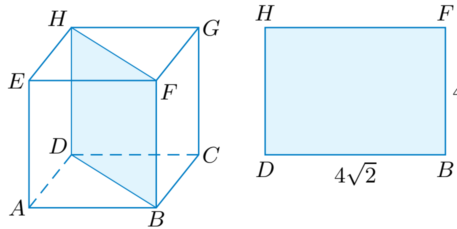
11. Rozpatrzmy ostrosłup z n-kątem w podstawie. Wysokości ścian bocznych tworzą z wysokością ostrosłupa H trójkąty prostokątne. Wysokości ścian bocznych są ich przeciwprostokątnymi, a wysokość ostrosłupa – przyprostokątną. Oznaczmy drugą przyprostokątną x_i, gdzie $i = 1, 2, 3, \ldots, n$. Odcinki x_i są rzutami prostokątnymi wysokości ścian bocznych na płaszczyznę podstawy i są one prostopadłe do odpowiednich boków n-kąta.
Z warunków zadania wiadomo, że wszystkie ściany boczne ostrosłupa są nachylone do podstawy pod takim samym kątem α, gdzie $\operatorname{tg}\alpha = \frac{H}{x_1} = \frac{H}{x_2} = \ldots = \frac{H}{x_n}$.
Stąd wynika, że $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, czyli spodek wysokości jest równo odległy od wszystkich boków n-kąta. Oznacza to, że jest on środkiem okręgu wpisanego w podstawę.

2.10. Przekroje prostopadłościanów

Uczeń:
- wyznacza przekroje prostopadłościanu,
- oblicza pole danego przekroju (również z wykorzystaniem trygonometrii),
- rozwiązuje zadania dotyczące przekrojów prostopadłościanu (również z wykorzystaniem trygonometrii).

Przykład 1

Sześcian o krawędzi 4 cm przecięto płaszczyzną wyznaczoną przez równoległe przekątne jego podstaw (rysunek obok). Oblicz pole otrzymanego przekroju.



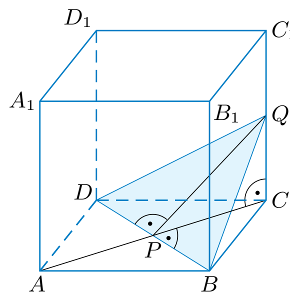
Dany przekrój jest prostokątem o polu $P = 4 \cdot 4\sqrt{2} = 16\sqrt{2}$ [cm^2].

Ćwiczenie 1

Sześcian o krawędzi a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α. Wyznacz pole otrzymanego przekroju, jeśli wiadomo, że: a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, b) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$.

Przykład 2

Wyznacz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną BDQ, gdzie Q jest środkiem krawędzi CC_1 (rysunek obok).



Z twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta PCQ:

$$|PQ|^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}a^2, \text{ skąd } |PQ| = \frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

Zatem pole przekroju:

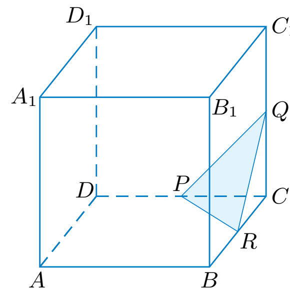
$$P_{BDQ} = \frac{1}{2}|BD| \cdot |PQ| = \frac{1}{2}a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^2\sqrt{6}}{4}$$

Ćwiczenie 2

Punkty P, Q, R są środkami krawędzi sześcianu wychodzących z wierzchołka C (rysunek obok). Oblicz pole przekroju sześcianu płaszczyzną PQR, jeśli wiadomo, że:

a) krawędź tego sześcianu ma długość 12,

b) przekątna tego sześcianu ma długość $2\sqrt{6}$.



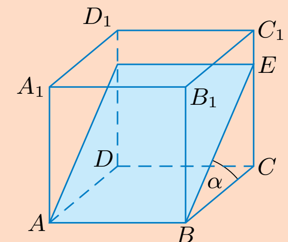
Ćwiczenie 3

Wyznacz pole przekroju sześcianu o krawędzi a płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt α taki, że:

a) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$, b) $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{2}$.

Ćwiczenie 1

a) $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, czyli $\alpha \approx 37^\circ$

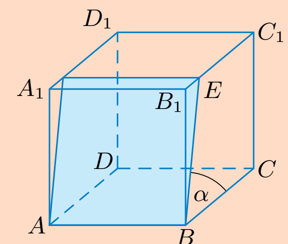


$\cos\alpha = \frac{a}{|BE|} = \frac{4}{5}$,

czyli $|BE| = \frac{5a}{4}$

$P = \frac{5a}{4} \cdot a = \frac{5a^2}{4}$

b) $\cos\alpha = \frac{1}{5}$, czyli $\alpha \approx 78^\circ$



$\frac{a}{|BE|} = \cos(90^\circ - \alpha) =$

$= \sin\alpha = \frac{2\sqrt{6}}{5}$,

czyli $|BE| = \frac{5\sqrt{6}}{12}a$

$P = \frac{5\sqrt{6}}{12}a \cdot a = \frac{5\sqrt{6}}{12}a^2$

Ćwiczenie 2

a – krawędź sześcianu

$|RC| = |CQ| = \frac{a}{2}$

$|RQ| = \frac{a\sqrt{2}}{2} = |PQ| = |PR|$

$P_{PRQ} = \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

a) $P_{PRQ} = 18\sqrt{3}$

b) $a\sqrt{3} = 2\sqrt{6}$, czyli $a = 2\sqrt{2}$

$P_{PRQ} = \sqrt{3}$

Ćwiczenie 3

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w przykładzie 2.

$|DB| = a\sqrt{2}$, $|PC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

a) $\frac{|PC|}{|PQ|} = \frac{\sqrt{3}}{3}$, czyli $|PQ| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

$P_{DBQ} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2}$

b) $\frac{|QC|}{|PC|} = \frac{1}{2}$, czyli $|QC| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

$|PQ| = \sqrt{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$

$P_{DBQ} = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{4} = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$

Ćwiczenie 4

a) $|EF| = \frac{1}{2}|DB| = 3\sqrt{2}$ cm

$|SC| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ cm

$|SC_1| = \sqrt{(\frac{3}{2}\sqrt{2})^2 + 6^2} =$

$= \sqrt{40,5}$ [cm]

$P = \frac{1}{2} \cdot 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{40,5} = 13,5$ [cm^2]

b) Przekrój jest rombem, gdzie

$|AC_1| = 6\sqrt{3}$ cm,

$|GH| = 6\sqrt{2}$ cm.

$P = \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 6\sqrt{2} = 18\sqrt{6}$ [cm^2]

c) $|DB| = 6\sqrt{2}$ cm

$|SC| = 3\sqrt{2}$ cm

$\frac{6}{h} = \sin 60^\circ$, czyli $h = 4\sqrt{3}$ cm

$\frac{|SP|}{6} = \operatorname{ctg} 60^\circ$, czyli

$|SP| = 2\sqrt{3}$ cm, stąd

$|PC| = (3\sqrt{2} - 2\sqrt{3})$ cm

$\frac{|GH|}{|PC|} = \frac{|DB|}{|SC|}$, czyli

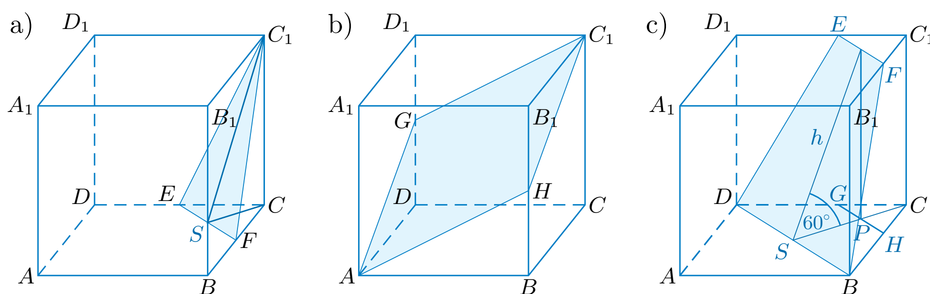
$|GH| = 2(3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}) = |EF|$

$P = \frac{1}{2}(6\sqrt{2}+6\sqrt{2}-4\sqrt{3}) \cdot 4\sqrt{3} =$

$= 24(\sqrt{6} - 1)$ [cm^2]

Ćwiczenie 4

Oblicz pole przekroju sześcianu przedstawionego na rysunku poniżej, jeżeli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 6 cm.



a) Płaszczyzna przekroju przechodzi przez środki sąsiednich krawędzi CD i BC (odpowiednio punkty E i F) oraz wierzchołek C_1.

b) Płaszczyzna przekroju przechodzi przez wierzchołki A i C_1 oraz punkty G i H będące odpowiednio środkami krawędzi DD_1 i BB_1.

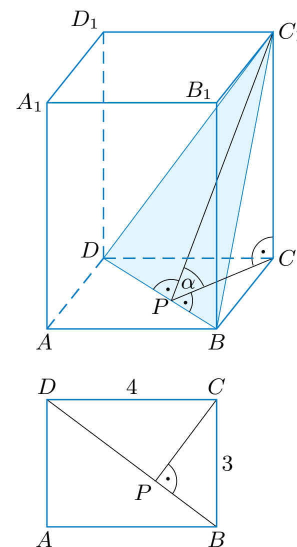
c) Płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną podstawy DB i tworzy z tą podstawą kąt 60°.

D Ćwiczenie 5

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy równej 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Uzasadnij, że jeśli pole otrzymanego przekroju jest równe 16, to płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą kąt 60°.

Przykład 3

Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt $ABCD$ o bokach $|AB| = 4$ i $|BC| = 3$. Płaszczyzna przechodząca przez wierzchołki B, C_1 i D tworzy z podstawą kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{2}{5}$ (rysunek obok). Oblicz pole trójkąta BC_1D.



Przekątna podstawy $|BD| = 5$.

Aby obliczyć długość odcinka PC, wyznaczamy pole trójkąta BCD na dwa sposoby:

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |BC| \cdot |CD| = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6$$

$$P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |PC| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot |PC| = \frac{5}{2} \cdot |PC|$$

Stąd $|PC| = \frac{12}{5}$.

$\frac{|PC|}{|PC_1|} = \cos\alpha$, więc $|PC_1| = \frac{|PC|}{\cos\alpha} = \frac{12}{5} : \frac{2}{5} = 6$.

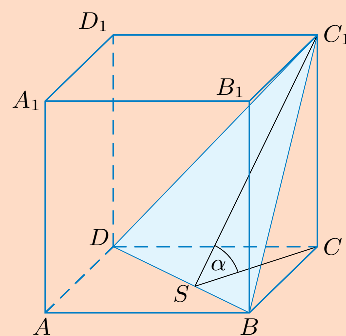
Zatem $P_{BC_1D} = \frac{1}{2} \cdot |DB| \cdot |PC_1| = \frac{1}{2} \cdot 5 \cdot 6 = 15$.

Ćwiczenie 5

$|DB| = 4\sqrt{2}$ cm, $|SC| = 2\sqrt{2}$ cm

$\frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot |SC_1| = 16$, czyli $|SC_1| = 4\sqrt{2}$ cm

$\cos\alpha = \frac{|SC|}{|SC_1|} = \frac{1}{2}$, zatem $\alpha = 60^\circ$

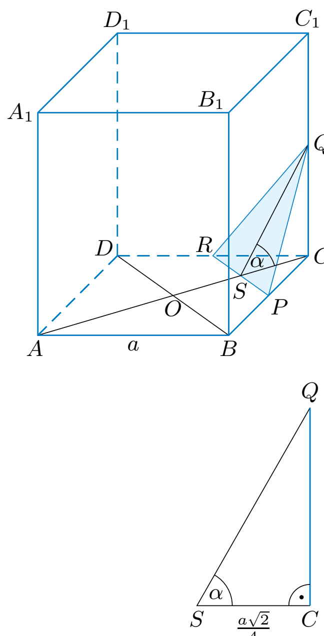


Ćwiczenie 6

Prostopadłościan, którego podstawą jest prostokąt o bokach 5 cm i 12 cm, przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Otrzymany przekrój jest trójkątem, którego pole jest równe 84,5 cm^2. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

Przykład 4

Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka (rysunek obok). Wyznacz objętość tego graniastosłupa oraz pole otrzymanego przekroju, jeśli jest on nachylony do podstawy graniastosłupa pod kątem $\alpha = 60^\circ$.



$|AC| = a\sqrt{2}$, zatem $|SC| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$ oraz:

$$|SQ| = 2|SC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

Wyznaczamy pole trójkąta PQR:

$$P_{PQR} = \frac{1}{2}|PR| \cdot |SQ| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2}{4}$$

Zauważmy, że:

$$|CQ| = |SC| \cdot \sqrt{3} = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

Zatem wysokość graniastosłupa:

$$|CC_1| = 2|CQ| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$$

Objętość graniastosłupa: $V = a^2 \cdot \frac{a\sqrt{6}}{2} = \frac{a^3\sqrt{6}}{2}$.

Ćwiczenie 7

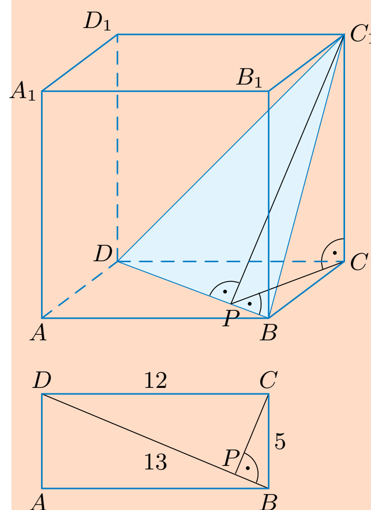
Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka. Oblicz miarę kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą tego graniastosłupa, i wyznacz jego objętość, jeśli trójkąt będący przekrojem ma pole równe:

a) $\frac{\sqrt{2}a^2}{8}$, b) $\frac{\sqrt{3}a^2}{12}$.

Ćwiczenie 8

Graniastosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jeden z wierzchołków i otrzymano w przekroju romb, którego kąt ostry ma miarę 2α. Wyznacz cosinus kąta nachylenia płaszczyzny przekroju do podstawy tego graniastosłupa.

Ćwiczenie 6



$|DB| = 13$ cm

$P_{BDC_1} = \frac{1}{2} \cdot 13 \cdot |PC_1| = 84{,}5$,

stąd $|PC_1| = 13$ cm

Z pola trójkąta DBC:

$\frac{5 \cdot 12}{2} = \frac{13 \cdot |PC|}{2}$, czyli

$|PC| = \frac{60}{13}$ cm

$|CC_1| = \sqrt{|PC_1|^2 - |PC|^2} =$

$= \sqrt{13^2 - \left(\frac{60}{13}\right)^2} = \frac{\sqrt{24\,961}}{13}$

$V = \frac{60\sqrt{24\,961}}{13}$ cm^2

Ćwiczenie 7

Przyjmijmy oznaczenia jak na rysunku w przykładzie 4.

$|RP| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ oraz $|SC| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$

a) $P_{RPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot |SQ| = \frac{\sqrt{2}a^2}{8}$, stąd $|SQ| = \frac{a}{2}$

$\cos\alpha = \frac{|SC|}{|SQ|} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, więc $\alpha = 45^\circ$

$|QC| = |SC| = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, stąd $|CC_1| = 2|QC| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$

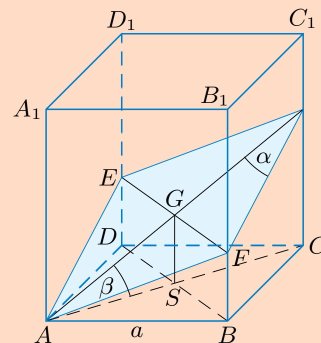
b) $P_{RPQ} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot |SQ| = \frac{\sqrt{3}a^2}{12}$, stąd $|SQ| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

$\cos\alpha = \frac{|SC|}{|SQ|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, więc $\alpha = 30^\circ$

$\frac{|QC|}{|SQ|} = \sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, czyli $|QC| = \frac{a\sqrt{6}}{12}$, stąd $|CC_1| = 2|QC| = \frac{a\sqrt{6}}{6}$

$V = \frac{a^3\sqrt{6}}{6}$

Ćwiczenie 8



$|AS| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, $|GF| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

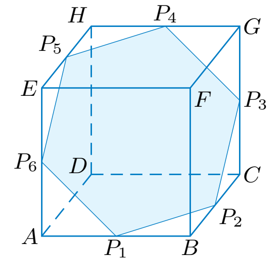
$\frac{|AG|}{|GF|} = \operatorname{ctg}\alpha$, czyli

$|AG| = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \operatorname{ctg}\alpha$

$\cos\beta = \frac{|AS|}{|AG|} = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{2}}{2}\operatorname{ctg}\alpha} = \operatorname{tg}\alpha$

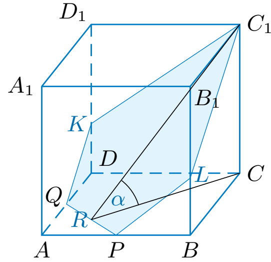
Zadania

D **1.** Przekrojem sześcianu o krawędzi a jest sześciokąt $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$, którego wierzchołki są środkami odpowiednich krawędzi sześcianu (rysunek obok). Uzasadnij, że otrzymany sześciokąt jest foremny. Wyznacz jego pole.



2. Sześcian o krawędzi 6 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i tworzącą z tą podstawą kąt α. Oblicz pole otrzymanego przekroju, jeśli: a) $\alpha = 30^\circ$, b) $\alpha = 45^\circ$.

3. Sześcian o krawędzi 4 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy (punkty P i Q na rysunku obok) oraz wierzchołek C_1. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α. Oblicz cosinus kąta α oraz pole otrzymanego przekroju.

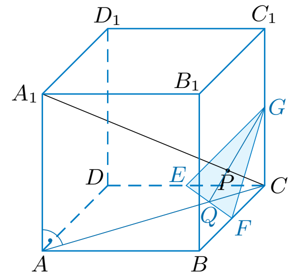


4. Graniastosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Otrzymany przekrój jest trójkątem równoramiennym, którego ramiona tworzą kąt α taki, że $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. Pole podstawy tego graniastosłupa jest równe 32 cm^2. Oblicz jego objętość.

5. Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Płaszczyzna otrzymanego przekroju tworzy z podstawą kąt 45°. Wyznacz pole przekroju i objętość tego graniastosłupa.

6. Podstawą prostopadłościanu jest prostokąt o bokach 6 cm i 8 cm. Prostopadłościan ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy. Otrzymany przekrój ma pole 25 cm^2. Oblicz objętość tego prostopadłościanu.

***7.** Sześcian o krawędzi 6 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z wierzchołka C (rysunek obok). P jest punktem wspólnym tej płaszczyzny i przekątnej A_1C sześcianu. Oblicz długość odcinka PC.

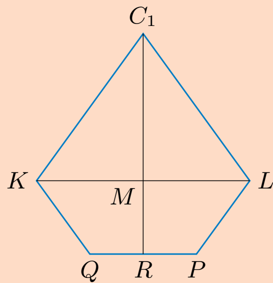


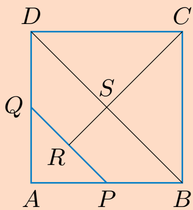
Odpowiedzi do zadań

1. Trójkąty P_1BP_2, P_2CP_3, P_3GP_4, P_4HP_5, P_5EP_6, P_6AP_1 są prostokątne równoramienne o ramionach długości $\frac{a}{2}$, zatem:
$|P_1P_2| = |P_2P_3| = |P_3P_4| =$
$= |P_4P_5| = |P_5P_6| = |P_6P_1|$,
czyli jest to sześciokąt foremny.
$|P_1P_2|^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{2}$
$P = 6 \cdot \frac{\frac{a^2}{2}\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

2. a) $12\sqrt{3}$ b) $18\sqrt{2}$

3. $|CR| = \frac{3}{4} \cdot 4\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$
$|C_1R|^2 = (3\sqrt{2})^2 + 4^2 =$
$= 34$, czyli $|C_1R| = \sqrt{34}$
$\cos\alpha = \frac{|CR|}{|C_1R|} = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{17}}{17}$





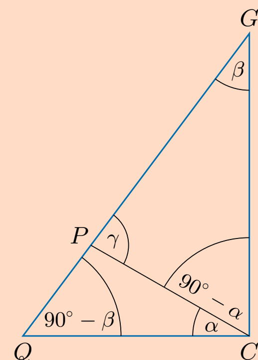
$\frac{|RM|}{|RC_1|} = \frac{|RS|}{|RC|} = \frac{1}{3}$
$|RM| = \frac{1}{3}\sqrt{34}$,
$|C_1M| = \frac{2}{3}\sqrt{34}$
$P = P_{KLC_1} + P_{KLPQ}$
$P = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \frac{2}{3}\sqrt{34}+$
$+ \frac{2\sqrt{2}+4\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{3}\sqrt{34} =$
$= \frac{4}{3}\sqrt{2 \cdot 34} + \sqrt{2 \cdot 34} =$
$= \frac{14}{3}\sqrt{17}$

4. 128 cm^3

5. $P = \frac{3\sqrt{2}a^2}{8}$, $V = \frac{\sqrt{2}a^3}{4}$

6. 67,2 cm^3

7. $|AC| = 6\sqrt{2}$ cm, $|A_1C| = 6\sqrt{3}$ cm
W $\triangle ACA_1$: $\sin\alpha = \frac{6}{6\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$|QC| = \frac{1}{4}|AC| = \frac{3\sqrt{2}}{2}$ oraz $|CG| = 3$, stąd
$|QG| = \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 3^2} = \frac{3\sqrt{6}}{2}$
W $\triangle QCG$: $\sin\beta = \frac{3\sqrt{2}}{2} : \frac{3\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$
$\sin\alpha = \sin\beta$ i α, β są kątami ostrymi, stąd $\alpha = \beta$.
Zatem $\triangle CPG$ jest prostokątny.
$\frac{|PC|}{|CG|} = \sin\beta$, czyli $|PC| = 3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} = \sqrt{3}$ [cm]

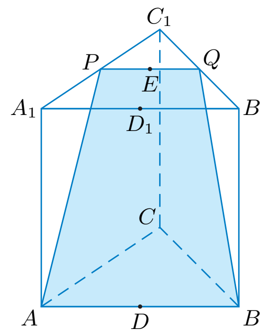


Warto wiedzieć

Przekroje innych graniastosłupów

Przykład

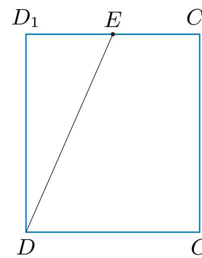
Wszystkie krawędzie graniastosłupa prawidłowego trójkątnego mają długość a. Wyznacz pole przekroju otrzymanego z przecięcia tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy.



Niech punkty P i Q będą odpowiednio środkami krawędzi A_1C_1 i B_1C_1 górnej podstawy, punkty D i D_1 – środkami krawędzi AB i A_1B_1, a punkt E niech będzie środkiem odcinka PQ. Rozpatrzmy prostokąt DCC_1D_1:

$$|D_1E| = \frac{1}{2}|D_1C_1| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$$

$$|DE| = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \frac{a\sqrt{19}}{4}$$



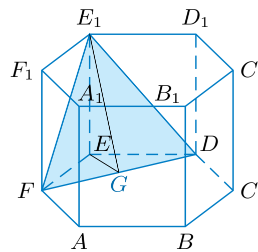
Opisany przekrój jest trapezem o podstawach AB i PQ oraz wysokości DE. Zatem jego pole:

$$P = \frac{|AB|+|PQ|}{2} \cdot |DE| = \frac{a+\frac{1}{2}a}{2} \cdot \frac{a\sqrt{19}}{4} = \frac{3a^2\sqrt{19}}{16}$$

1. Graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź dolnej podstawy i środki dwóch krawędzi górnej podstawy. Otrzymany przekrój ma pole równe a^2. Oblicz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z dolną podstawą tego graniastosłupa.

2. Graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną ściany bocznej i środek tej krawędzi podstawy, która nie ma punktu wspólnego z tą przekątną. Pole otrzymanego przekroju jest równe S. Oblicz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z dolną podstawą, oraz wyznacz objętość tego graniastosłupa.

3. Graniastosłup prawidłowy sześciokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną zawierającą przekątne sąsiednich ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka (rysunek obok). Pole otrzymanego przekroju jest równe S. Oblicz cosinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą, oraz wyznacz objętość tego graniastosłupa.



3. $|EG| = \frac{1}{2}a$

$|FD| = 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$

$S = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot |GE_1|$, czyli $|GE_1| = \frac{2S\sqrt{3}}{3a}$

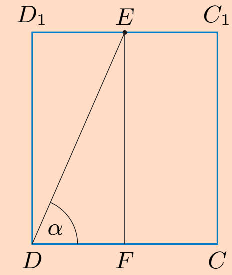
$\cos\alpha = \frac{|EG|}{|GE_1|} = \frac{a}{2} : \frac{2S\sqrt{3}}{3a} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4S}$

$|E_1E|^2 + |EG|^2 = |GE_1|^2$, czyli $|E_1E| = \frac{\sqrt{16S^2-3a^4}}{2a\sqrt{3}}$

$V = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{16S^2-3a^4}}{2a\sqrt{3}} = \frac{3a\sqrt{16S^2-3a^4}}{4}$

Odpowiedzi do zadań

1.



$|PQ| = \frac{1}{2}|AB| = \frac{1}{2}a$

Pole przekroju:

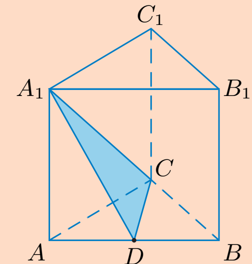
$\frac{\left(a+\frac{1}{2}a\right)\cdot|DE|}{2} = a^2$,

więc $|DE| = \frac{4}{3}a$

$|DF| = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{4}$

$\cos\alpha = \frac{|DF|}{|DE|} = \frac{a\sqrt{3}}{4} : \frac{4a}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{16}$

2.



$|CD| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

Trójkąt A_1DC jest prostokątny, więc

$S = \frac{1}{2}|CD| \cdot |DA_1| =$

$= \frac{a\sqrt{3}}{4}|DA_1|$.

Zatem $|DA_1| = \frac{4S}{a\sqrt{3}}$ oraz

$\cos\sphericalangle ADA_1 = \frac{|AD|}{|DA_1|} =$

$= \frac{a}{2} : \frac{4S}{a\sqrt{3}} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8S}$.

Dla trójkąta A_1AD:

$|AA_1|^2 = \left(\frac{4S}{a\sqrt{3}}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2 =$

$= \frac{64S^2-3a^4}{12a^2}$,

czyli $|AA_1| = \frac{\sqrt{64S^2-3a^4}}{2a\sqrt{3}}$

$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\sqrt{64S^2-3a^4}}{2a\sqrt{3}} =$

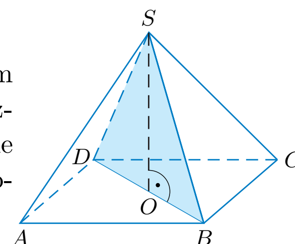
$= \frac{a}{8}\sqrt{64S^2 - 3a^4}$

*2.11. Przekroje ostrosłupów

Uczeń:
- wyznacza przekroje ostrosłupa prawidłowego,
- oblicza pole danego przekroju ostrosłupa,
- rozwiązuje zadania dotyczące przekrojów ostrosłupa.

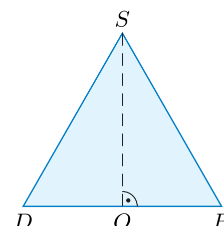
Przykład 1

Ostrosłup prawidłowy czworokątny o wysokości 9 cm przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i przekątną podstawy (rysunek obok). Pole otrzymanego przekroju jest równe 36 cm². Oblicz objętość tego ostrosłupa.



Rozpatrzmy przekrój DBS:

$\frac{1}{2}|DB|\cdot 9 = 36$, czyli $|DB| = 8$ cm.



Podstawą ostrosłupa jest kwadrat o przekątnej 8 cm, więc bok kwadratu ma długość $\frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$ [cm].

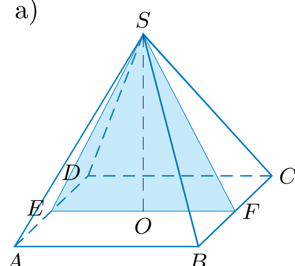
Obliczamy objętość ostrosłupa:

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3}\cdot(4\sqrt{2})^2\cdot 9 = 96\ [\text{cm}^3]$$

Ćwiczenie 1

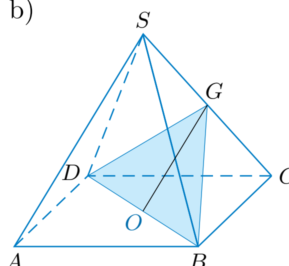
Oblicz pole przekroju ostrosłupa prawidłowego czworokątnego przedstawionego na rysunku poniżej. Wiadomo, że krawędź jego podstawy ma długość 6 cm, a wszystkie ściany boczne są trójkątami równobocznymi.

a)



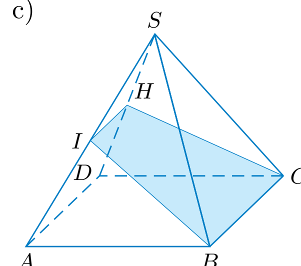
Płaszczyzna przekroju przechodzi przez wysokość ściany bocznej i wysokość ostrosłupa.

b)



Płaszczyzna przekroju przechodzi przez przekątną podstawy i punkt G będący środkiem krawędzi bocznej.

c)



Płaszczyzna przekroju przechodzi przez krawędź podstawy i punkty H, I będące środkami krawędzi bocznych.

Ćwiczenie 2

Narysuj przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną przechodzącą przez:

a) wysokość podstawy i krawędź boczną,

b) krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej.

Oblicz pole tego przekroju, jeśli wiadomo, że krawędź podstawy ostrosłupa ma długość 6 cm, a krawędź boczna – 12 cm.

Ćwiczenie 1

a) $|SF| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ [cm]

$|SO|^2 + 3^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2$,

czyli $|SO| = 3\sqrt{2}$ cm

$P = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{2} = 9\sqrt{2}$ [cm²]

b) $|GB| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ [cm]

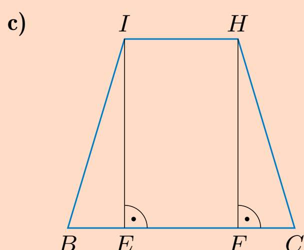
$|OB| = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2} = 3\sqrt{2}$ [cm]

$|OG|^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2$,

czyli $|OG| = 3$ cm

$P = \frac{1}{2}\cdot 6\sqrt{2}\cdot 3 = 9\sqrt{2}$ [cm²]

c)



$|IH| = 3$ cm

$|IB| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ [cm]

$|BE| = 1{,}5$ cm

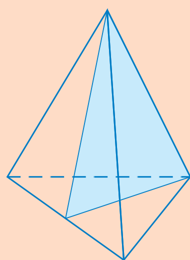
$|IE|^2 + (1{,}5)^2 = \left(3\sqrt{3}\right)^2$,

czyli $|IE| = \frac{3\sqrt{11}}{2}$ cm

$P = \frac{(3+6)\cdot\frac{3\sqrt{11}}{2}}{2} = \frac{27\sqrt{11}}{4}$ [cm²]

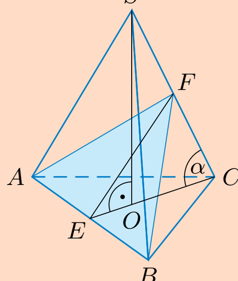
Ćwiczenie 2

a)



$P = 9\sqrt{11}$ cm²

b)



$|EC| = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ [cm]

$|OC| = \frac{2}{3}|EC| = 2\sqrt{3}$ cm

$\frac{|OC|}{|SC|} = \frac{\sqrt{3}}{6} = \cos\alpha$

Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta FEC:

$|FE|^2 = |FC|^2 + |EC|^2 - 2|FC|\cdot|EC|\cdot\cos\alpha$

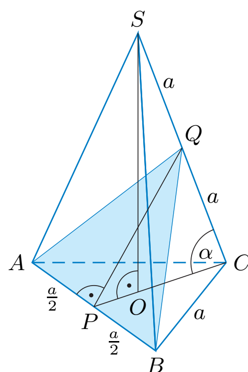
$|FE|^2 = 45$, czyli $|FE| = 3\sqrt{5}$ cm

$P = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3\sqrt{5} = 9\sqrt{5}$ [cm²]

dlanauczyciela.pl | Kartkówka 2.11

Ćwiczenie 3
Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny, którego krawędź podstawy ma długość 5 cm. Pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną prostopadłą do podstawy i zawierającą jej przekątną jest równe 25 cm^2. Oblicz pole przekroju tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą przekątną podstawy i prostopadłą do krawędzi bocznej rozłącznej z tą przekątną.

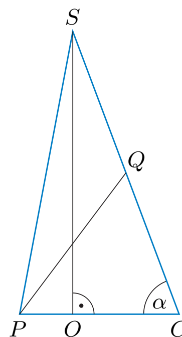
Przykład 2
Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a, a krawędź boczna – $2a$. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej (rysunek obok). Wyznacz pole tego przekroju.



Niech punkt O będzie spodkiem wysokości ostrosłupa. W trójkącie PCS: $|SC| = 2a$, $|PC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz:

$$|OC| = \frac{2}{3}|PC| = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

Zatem $\cos\alpha = \frac{|OC|}{|SC|} = \frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{6}$.



Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta PCQ:

$$|PQ|^2 = |PC|^2 + |CQ|^2 - 2 \cdot |PC| \cdot |CQ| \cdot \cos\alpha$$

$$|PQ|^2 = \left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 + a^2 - 2 \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$|PQ|^2 = \frac{3a^2}{4} + a^2 - \frac{a^2}{2} = \frac{5a^2}{4}$$

$$|PQ| = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

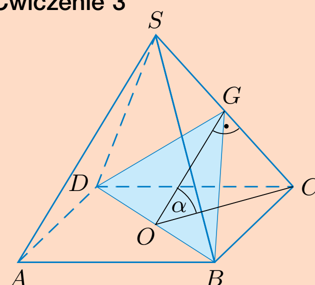
Wyznaczamy pole przekroju, czyli pole trójkąta ABQ:

$$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{\sqrt{5}}{2}a = \frac{a^2\sqrt{5}}{4}$$

Ćwiczenie 4
Czworościan foremny przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środek przeciwległej krawędzi bocznej. Oblicz sinus kąta, który płaszczyzna przekroju tworzy z podstawą czworościanu.

Ćwiczenie 5
Czworościan foremny przecięto płaszczyzną przechodzącą przez krawędź boczną i wysokość podstawy. Jako przekrój otrzymano trójkąt o polu równym $4\sqrt{2}$ cm^2. Oblicz objętość tego czworościanu.

Ćwiczenie 3



$|DB| = 5\sqrt{2}$ cm, $|OC| = \frac{5\sqrt{2}}{2}$ cm

$\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot |SO| = 25$,

czyli $|SO| = 5\sqrt{2}$ cm

$|SC| = \sqrt{|SO|^2 + |OC|^2} =$

$= \frac{5\sqrt{10}}{2}$ cm

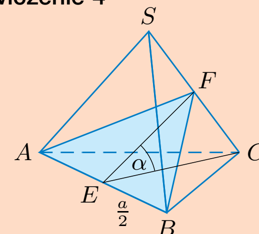
Pole trójkąta SOC:

$\frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{10}}{2} \cdot |OG|$,

czyli $|OG| = \sqrt{10}$ cm

$P = \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = 5\sqrt{5}$ [cm^2]

Ćwiczenie 4



$|EB| = |FC| = \frac{a}{2}$

$|EC| = |BF| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

EF jest środkową w trójkącie równoramiennym SEC, więc $EF \perp SC$. Zatem

$\sin\alpha = \frac{|CF|}{|EC|} = \frac{\frac{1}{2}a}{\frac{a\sqrt{3}}{2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ćwiczenie 5
$|ES| = |EC| = \frac{a\sqrt{3}}{2}$ oraz $|SC| = a$

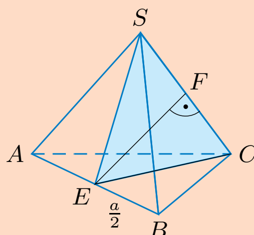
$|EF| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

$P = \frac{1}{2} \cdot a \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{a^2\sqrt{2}}{4} = 4\sqrt{2}$, czyli $a = 4$ cm

Objętość czworościanu foremnego o krawędzi a wyraża się za pomocą wzoru:

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

Zatem $V = \frac{64\sqrt{2}}{12} = \frac{16\sqrt{2}}{3}$ [cm^3].



Zadania

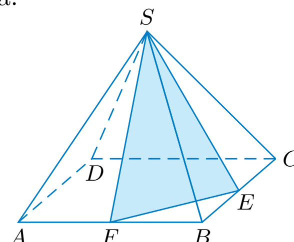
D **1.** Krawędź boczna ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 26 cm, a pole podstawy jest równe $100\sqrt{3}$ cm^2. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch krawędzi podstawy oraz jego wierzchołek. Wykaż, że pole otrzymanego przekroju jest większe od 115 cm^2.

2. Ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka podstawy. Pole otrzymanego przekroju jest równe S. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

D **3.** Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość a, a jego objętość jest równa $\frac{\sqrt{2}}{24}a^3$. Wykaż, że przekrój tego ostrosłupa płaszczyzną zawierającą jego wysokość oraz krawędź boczną jest trójkątem prostokątnym o polu $\frac{\sqrt{2}}{8}a^2$.

4. Przekrój ostrosłupa prawidłowego czworokątnego płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i przekątną podstawy jest trójkątem równobocznym o polu P. Wyznacz objętość tego ostrosłupa.

5. Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a przecięto płaszczyzną przechodzącą przez jego wierzchołek i środki sąsiednich krawędzi podstawy. Płaszczyzna ta tworzy z podstawą kąt α. Wyznacz pole otrzymanego przekroju oraz objętość tego ostrosłupa.



D **6.** Dany jest ostrosłup prawidłowy czworokątny o podstawie $ABCD$ i wierzchołku S. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez punkty B i D oraz przez punkt P będący środkiem krawędzi CS. Wykaż, że jeśli trójkąt BDP jest równoboczny, to stosunek długości krawędzi bocznej ostrosłupa do długości krawędzi podstawy jest równy $2\sqrt{3} : \sqrt{2}$.

7. Przekrój ostrosłupa prawidłowego trójkątnego płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środek jego wysokości ma pole równe $2\sqrt{6}$. Płaszczyzna przekroju jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

8. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego trójkątnego ma długość 4. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną zawierającą krawędź podstawy i środek jego wysokości. Płaszczyzna ta jest nachylona do podstawy pod kątem 45°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

6. $|DP| = |BP| = |BD| = a\sqrt{2}$

Dla trójkąta PNC: $x^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{16}$

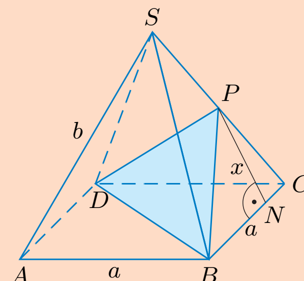
Dla trójkąta PNB: $x^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - \left(\frac{3a}{4}\right)^2 = \frac{23a^2}{16}$

Zatem:

$\frac{b^2}{4} - \frac{a^2}{16} = \frac{23a^2}{16}$

$\frac{b^2}{4} = \frac{3a^2}{2}$

$\frac{b^2}{a^2} = \frac{12}{2}$, czyli $\frac{b}{a} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$



Odpowiedzi do zadań

1. Pole podstawy:
$P_p = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 100\sqrt{3}$,
więc $a = 20$ cm
Wysokość ściany bocznej:
$h_b^2 = 26^2 - 10^2 = 576$
Wysokość przekroju:
$h = \sqrt{576 - 5^2} = \sqrt{551}$ [cm]
Pole przekroju:
$P = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \sqrt{551} > 5 \cdot 23 =$
$= 115$ [cm^2]

2. $\frac{a}{24}\sqrt{768S^2 - a^4}$

3. H – wysokość ostrosłupa
h_b – wysokość ściany bocznej
h_p – wysokość podstawy
b – krawędź boczna
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{\sqrt{2}}{24}a^3$, czyli
$H = \frac{a\sqrt{6}}{6}$
Pole przekroju:
$P = \frac{1}{2} \cdot h_p \cdot H =$
$= \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{2}}{8}a^2$
$b = \sqrt{\left(\frac{2}{3}h_p\right)^2 + H^2} =$
$= \sqrt{\frac{3a^2}{9} + \frac{6a^2}{36}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$h_b = \sqrt{\left(\frac{1}{3}h_p\right)^2 + H^2} =$
$= \sqrt{\frac{3a^2}{36} + \frac{6a^2}{36}} = \frac{a}{2}$
$b^2 + h_b^2 = \frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4} = h_p^2$
Z twierdzenia odwrotnego do twierdzenia Pitagorasa rozpatrywany przekrój jest trójkątem prostokątnym.

4. $\frac{2}{3}P\sqrt{\frac{\sqrt{3}P}{3}}$

5. $P = \frac{a^2}{8\cos\alpha}$, $V = \frac{1}{12}\sqrt{2}a^3 \operatorname{tg}\alpha$

7. $5\frac{1}{3}$

8. $4(\sqrt{3} + \sqrt{15})$

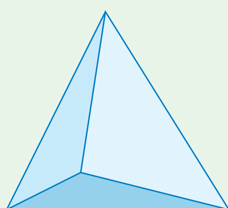
2.12. Zagadnienia uzupełniające

Wielościany foremne

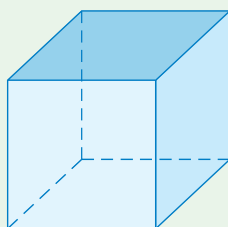


Wielościanem foremnym (bryłą platońską) nazywamy wielościan wypukły, którego wszystkie ściany są przystającymi wielokątami foremnymi i w każdym wierzchołku zbiega się jednakowa liczba ścian.

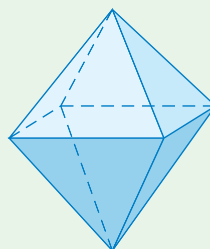
Istnieje pięć wielościanów foremnych. Wszystkie znane były już w starożytności (nazwy greckie podane w nawiasach pochodzą od greckich nazw liczb 4, 6, 8, 12 i 20).



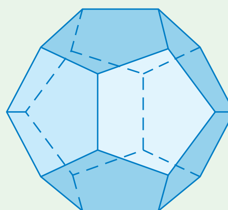
Czworościan foremny (tetraedr) ma cztery ściany będące trójkątami równobocznymi.



Sześcian (heksaedr) ma sześć ścian będących kwadratami.

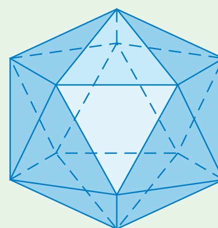


Ośmiościan foremny (oktaedr) ma osiem ścian będących trójkątami równobocznymi.

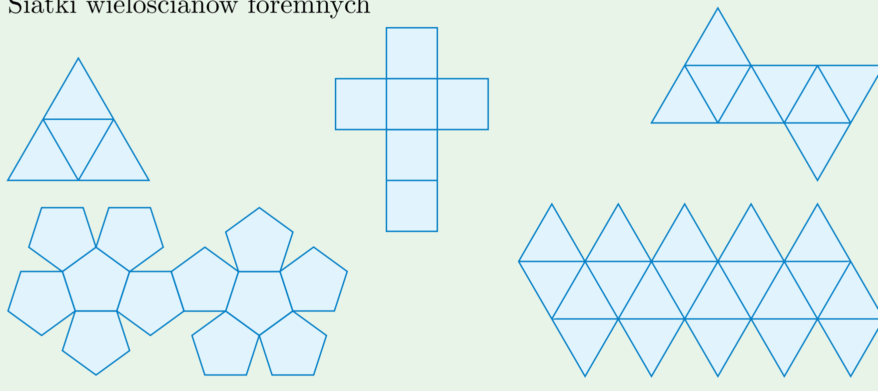


Dwunastościan foremny (dodekaedr) ma dwanaście ścian będących pięciokątami foremnymi.

Dwudziestościan foremny (ikosaedr) ma dwadzieścia ścian będących trójkątami równobocznymi.



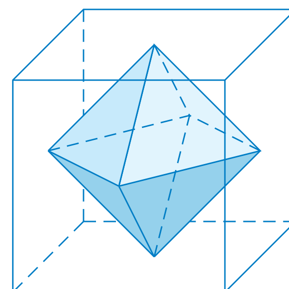
Siatki wielościanów foremnych



1. Przerysuj poniższą tabelę do zeszytu i uzupełnij dane dotyczące wielościanów foremnych. Sprawdź, czy dla każdego z tych wielościanów spełniony jest wzór Eulera: $s - k + w = 2$, gdzie s oznacza liczbę ścian, k – liczbę krawędzi, w – liczbę wierzchołków.

Wielościan foremny	Liczba ścian	Liczba krawędzi	Liczba wierzchołków
czworościan	4	6	4
sześcian	6	12	8
ośmiościan	8	12	6
dwunastościan	12	30	20
dwudziestościan	20	30	12

2. Oblicz pole powierzchni i objętość ośmiościanu foremnego, którego krawędź ma długość 4 cm.



3. Łączymy odpowiednio środki ścian sześcianu i otrzymujemy ośmiościan foremny (rysunek obok). Oblicz pole powierzchni i objętość tego ośmiościanu, jeśli wiadomo, że krawędź sześcianu ma długość 8 cm.

4. Przekrój ośmiościanu foremnego płaszczyzną, która przechodzi przez jego dwa przeciwległe wierzchołki oraz środki dwóch przeciwległych krawędzi, jest rombem o polu równym $18\sqrt{2}$ cm^2. Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi tego ośmiościanu.

Odpowiedzi do zadań

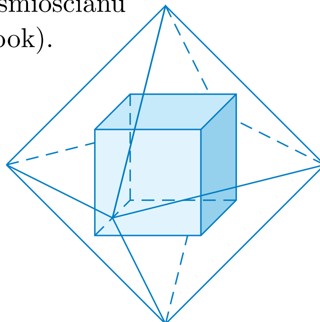
2. $P_c = 32\sqrt{3}$ cm^2, $V = \frac{64}{3}\sqrt{2}$ cm^3

3. $P_c = 64\sqrt{3}$ cm^2, $V = 85\frac{1}{3}$ cm^3

4. 72 cm

5. Pole powierzchni czworościanu foremnego jest dwa razy większe od pola powierzchni ośmiościanu foremnego. Oblicz stosunek objętości tych wielościanów.

6. Łączymy odpowiednio środki ciężkości ścian ośmiościanu foremnego i otrzymujemy sześcian (rysunek obok). Oblicz objętość tego sześcianu, jeśli wiadomo, że krawędź ośmiościanu ma długość 4 cm.



7. Ściany wielościanu foremnego malujemy w ten sposób, aby żadne dwie ściany mające wspólną krawędź nie były tego samego koloru. Jakiej najmniejszej liczby kolorów należy użyć do pomalowania:
a) czworościanu, b) sześcianu, c) ośmiościanu?

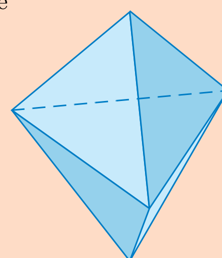
8. Dwa czworościany foremne tej samej wielkości złączono podstawami i w ten sposób otrzymano wielościan o sześciu ścianach. Narysuj otrzymany wielościan. Czy jest on foremny?

5. $2:1$

6. $\frac{128}{27}\sqrt{2}$ cm^3

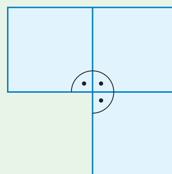
7. **a)** 4 **b)** 3 **c)** 2

8. nie

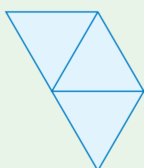
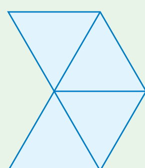
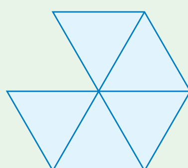


- Dlaczego istnieje tylko pięć wielościanów foremnych?

W każdym wierzchołku wielościanu spotykają się co najmniej jego trzy ściany. Na przykład w sześcianie są to trzy kwadraty – fragment siatki przedstawiający ściany mające wspólny wierzchołek przedstawiono na rysunku obok.

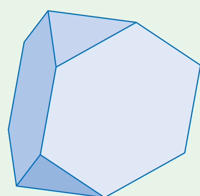


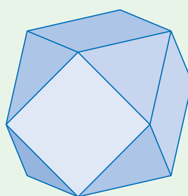
W każdym fragmencie siatki wielościanu zawierającym ściany mające wspólny wierzchołek suma kątów przy tym wierzchołku musi być mniejsza od $360°$. Zatem jeśli ścianą wielościanu jest trójkąt równoboczny, to przy jednym wierzchołku mogą się znajdować trzy trójkąty (czworościan foremny), cztery trójkąty (ośmiościan foremny) lub pięć trójkątów (dwudziestościan foremny). W przypadku sześciu trójkątów otrzymalibyśmy $360°$.

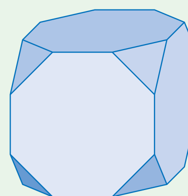




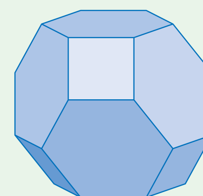
Istnieje tylko jeden wielościan foremny, którego ścianami są pięciokąty i nie istnieją wielościany foremne, których ścianami są n-kąty dla $n > 5$ (uzasadnij). Zatem istnieje tylko pięć wielościanów foremnych.

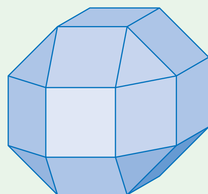
Bryły Archimedesa

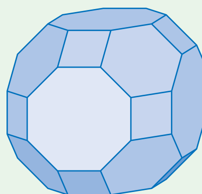

czworościan ścięty

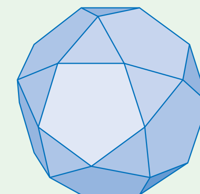

sześcio-ośmiościan

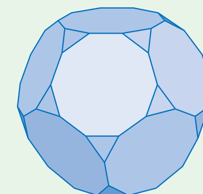

sześcian ścięty

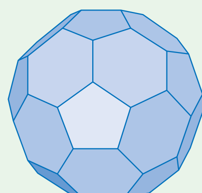

ośmiościan ścięty

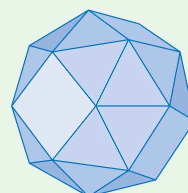

sześcio-ośmiościan rombowy mały

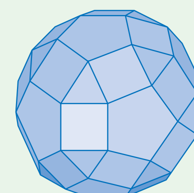

sześcio-ośmiościan rombowy wielki

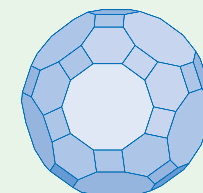

dwudziesto--dwunastościan

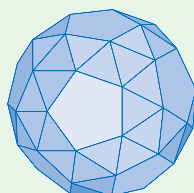

dwunastościan ścięty


dwudziestościan ścięty


sześcian przycięty


dwudziesto--dwunastościan rombowy mały


dwudziesto--dwunastościan rombowy wielki


dwunastościan przycięty

Na rysunkach przedstawiono 13 **brył Archimedesa** – wielościanów półforemnych. Wszystkie ich ściany są wielokątami foremnymi, nie wszystkie o jednakowej liczbie boków. Wszystkie krawędzie mają jednakową długość.

9. $7(1 + \frac{2}{3}\sqrt{2})$ cm^3

10. $3(\sqrt{2} - 1)$ cm

9. Oblicz objętość sześcianu ściętego, którego krawędź ma długość 1 cm.

10. Z sześcianu o krawędzi 3 cm odcięto narożniki i otrzymano sześcian ścięty. Oblicz długość jego krawędzi.

Zestawy powtórzeniowe

Zestaw I

1. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego ma długość 2, a jego pole powierzchni całkowitej jest równe 24. Oblicz wysokość tego graniastosłupa, jeżeli jego podstawą jest: a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

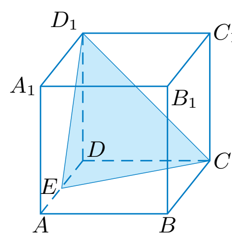
2. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość sześcianu, którego przekątna jest o 2 dłuższa od jego krawędzi.

3. Ściana boczna ostrosłupa prawidłowego jest nachylona do podstawy pod kątem 30°, a krawędź podstawy ma długość 6. Oblicz pole powierzchni całkowitej i objętość tego ostrosłupa, jeżeli jego podstawą jest:

a) czworokąt, b) trójkąt, c) sześciokąt.

4. Wysokość prostopadłościanu jest równa 4 cm, a jego podstawą jest kwadrat o boku 3 cm. Oblicz cosinus kąta zawartego między przekątnymi ścian bocznych wychodzącymi z tego samego wierzchołka.

5. Sześcian o krawędzi długości 1 przecięto płaszczyzną przechodzącą przez wierzchołki C i D_1 oraz środek krawędzi AD (rysunek obok). Oblicz długości boków trójkąta CD_1E oraz cosinus kąta położonego naprzeciwko najdłuższego boku tego trójkąta.



6. W sześcianie połączono wierzchołki dolnej podstawy z jednym z wierzchołków górnej podstawy i otrzymano ostrosłup. Oblicz cosinus kąta zawartego między ścianami bocznymi tego ostrosłupa, których wspólną krawędzią jest przekątna sześcianu.

7. Oblicz długość krawędzi czworościanu foremnego, którego wierzchołki są czterema wierzchołkami sześcianu o objętości 8.

8. Wyznacz objętość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego, którego pole powierzchni bocznej jest równe P, a kąt między wysokościami ścian bocznych opuszczonymi z wierzchołka ostrosłupa ma miarę 2α. Rozważ dwa przypadki.

9. Spośród wszystkich ostrosłupów prawidłowych czworokątnych $ABCDS$ o krawędzi bocznej długości 5 wybieramy ten, dla którego pole trójkąta ACS jest największe. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Odpowiedzi do zadań

1. **a)** 2
b) $4 - \frac{\sqrt{3}}{3}$
c) $2 - \sqrt{3}$

2. $P_c = 12(\sqrt{3} + 2)$
$V = 2(5 + 3\sqrt{3})$

3. **a)** $P_c = 12(3 + 2\sqrt{3})$
$V = 12\sqrt{3}$
b) $P_c = 9(2 + \sqrt{3})$, $V = 3\sqrt{3}$
c) $P_c = 54(2 + \sqrt{3})$
$V = 54\sqrt{3}$

4. 0,64

5. $|CD_1| = \sqrt{2}$
$|CE| = |ED_1| = \frac{\sqrt{5}}{2}$
$\cos\alpha = \frac{1}{5}$

6. D_1, C_1, A_1, B_1, E, α, D, C, A, a, B

$|A_1B| = a\sqrt{2}$, $|BC| = a$ oraz $|A_1C| = a\sqrt{3}$

Pole trójkąta A_1BC:
$\frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot a = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{3} \cdot |BE|$
$|BE| = \frac{a\sqrt{6}}{3} = |DE|$

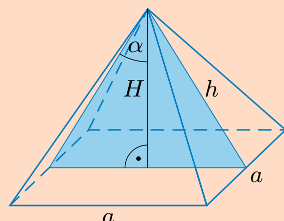
Z twierdzenia cosinusów dla trójkąta BED mamy:
$\left(a\sqrt{2}\right)^2 = \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 +$
$+ \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 - 2\left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2 \cos\alpha$

Stąd $\cos\alpha = -\frac{1}{2}$.

7. $2\sqrt{2}$

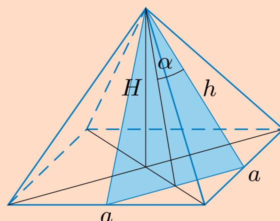
9. $P_{ACS} = \frac{1}{2} \cdot 5^2 \cdot \sin ASC$
Pole trójkąta ASC jest największe, gdy $ASC = 90^\circ$.
Wtedy:
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot (5\sqrt{2})^2 \cdot \frac{5\sqrt{2}}{2} = \frac{125\sqrt{2}}{2}$

8. I przypadek



$V = \frac{1}{3} \cdot P\sin\alpha \cdot \frac{\cos\alpha\sqrt{P\sin\alpha}}{2\sin\alpha} =$
$= \frac{1}{6}P\cos\alpha\sqrt{P\sin\alpha}$

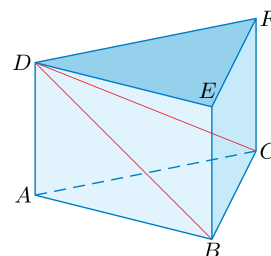
II przypadek



$V = \frac{1}{3} \cdot \sqrt{2}P\sin\alpha \cdot$
$\cdot \frac{\sqrt[4]{2}}{4\sin\alpha}\sqrt{2P\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)} =$
$= \frac{\sqrt[4]{2}}{6}P\sqrt{P\sin\alpha(1 - 2\sin^2\alpha)}$

Zestaw II

1. Dany jest graniastosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy długości 6 cm (rysunek obok). Przekątne ścian bocznych poprowadzone z wierzchołka D tworzą kąt α taki, że $\operatorname{tg}\alpha = \frac{4}{3}$. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.



2. W graniastosłupie prawidłowym trójkątnym przekątne ścian bocznych wychodzące z tego samego wierzchołka mają długość p i tworzą kąt α. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

3. Podstawą ostrosłupa $ABCS$ jest trójkąt równoramienny ABC, w którym $|AB| = 4$, $|AC| = |BC| = 6$, a ściany boczne są nachylone do podstawy pod kątem 60°. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

4. Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi. Oblicz miarę kąta α zawartego między ścianami bocznymi i miarę kąta β, który tworzą ściany boczne z podstawą tego ostrosłupa.

5. Kąt dwuścienny zawarty między sąsiednimi ścianami bocznymi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma miarę 2α. Wyznacz sinus kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

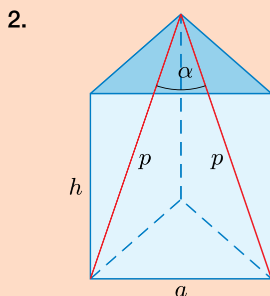
*6. Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 6 cm, a kąt zawarty między jego sąsiednimi ścianami bocznymi ma miarę 120°. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

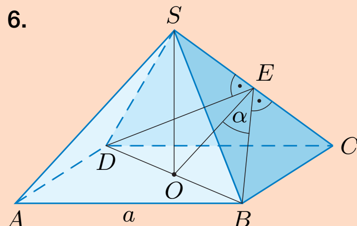
7. Krawędź podstawy graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 4 cm, a krawędź boczna – 5 cm. Graniastosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy tak, że w przekroju otrzymano trapez, którego jedna podstawa jest dwa razy krótsza od drugiej. Oblicz pole tego trapezu.

8. W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym wysokość jest równa h i tworzy z krawędzią boczną kąt 45°. Ostrosłup ten przecięto płaszczyzną przechodzącą przez przekątną podstawy i nachyloną do podstawy pod kątem 60°. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

D 9. Niech P będzie dowolnym punktem leżącym wewnątrz czworościanu foremnego. Wykaż, że suma odległości punktu P od ścian tego czworościanu jest równa jego wysokości.

---

1. $V = 27\sqrt{3}\ \text{cm}^3$
   $P_c = 18(\sqrt{3}+3)\ \text{cm}^2$
2. 

   Z twierdzenia cosinusów mamy:
   $a^2 = p^2 + p^2 - 2p^2\cos\alpha$
   $a^2 = p^2(2 - 2\cos\alpha)$,
   czyli $a = p\sqrt{2-2\cos\alpha}$
   $h = \sqrt{p^2 - a^2} =$
   $= \sqrt{p^2(2\cos\alpha - 1)} =$
   $= p\sqrt{2\cos\alpha - 1}$
   $V = \frac{p^2(2-2\cos\alpha)\sqrt{3}}{4}\cdot$
   $\cdot p\sqrt{2\cos\alpha - 1} =$
   $= \frac{\sqrt{3}}{2}p^3(1-\cos\alpha)\cdot$
   $\cdot\sqrt{2\cos\alpha - 1}$
3. $24\sqrt{2}$
4. $\alpha = 90^\circ$, $\beta \approx 55^\circ$
5. $\sqrt{2}\cos\alpha$
6. 

   $\alpha = 60^\circ$, $|OB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
   $\frac{|OB|}{|EB|} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, czyli $|EB| = \frac{a\sqrt{6}}{3}$
   $|EC| = \sqrt{a^2 - \left(\frac{a\sqrt{6}}{3}\right)^2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$
   $\triangle CFS \sim \triangle CEB$
   (cecha KKK)
   $\frac{|EC|}{a} = \frac{\frac{a}{2}}{b}$, stąd $b = \frac{a\sqrt{3}}{2}$
   W $\triangle SOC$ mamy:
   $b^2 = 36 + (\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$
   $\frac{3a^2}{4} = 36 + \frac{a^2}{2}$,
   czyli $a = 12$ cm
   $V = \frac{1}{3}\cdot 12^2 \cdot 6 = 288\ [\text{cm}^2]$

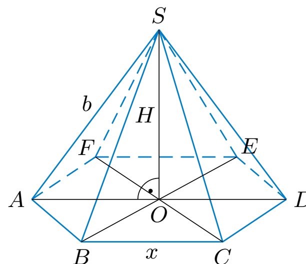
7. $9\sqrt{6}\ \text{cm}^2$
8. $h^2(\sqrt{3}-1)$
9. Niech H będzie wysokością czworościanu $ABCS$. Łączymy punkt P z wierzchołkami czworościanu i otrzymujemy cztery czworościany: $ABCP$, $ABSP$, $BCSP$ i $ACSP$. Podstawą każdego z tych czworościanów jest jedna ze ścian czworościanu $ABCS$, zatem ich pola podstaw są równe. Oznaczmy je P_p. Odległości punktu P od ścian czworościanu $ABCS$ są wysokościami nowo powstałych czworościanów. Oznaczmy je h_1, h_2, h_3 i h_4.
   Suma objętości nowych czworościanów jest równa objętości czworościanu $ABCS$, stąd:
   $\frac{1}{3}P_pH = \frac{1}{3}P_ph_1 + \frac{1}{3}P_ph_2 + \frac{1}{3}P_ph_3 + \frac{1}{3}P_ph_4 \ / : \frac{1}{3}P_p$
   $H = h_1 + h_2 + h_3 + h_4$



Przykład

Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego jest równa 12. Jakie powinny być długości krawędzi takiego ostrosłupa, aby miał on możliwie największą objętość? Oblicz tę objętość.

Oznaczmy przez x długość krawędzi podstawy, a przez b – długość krawędzi bocznej.
Z warunku zadania $6x + 6b = 12$, czyli $x = 2 - b$.
Ponieważ $b > x > 0$, otrzymujemy $0 < 2 - b < b$, czyli $b \in (1; 2)$, a stąd $x \in (0; 1)$.



Zauważmy, że jeśli O jest spodkiem wysokości H ostrosłupa, to $|AO| = x$. Na podstawie twierdzenia Pitagorasa dla trójkąta AOS otrzymujemy:

$$H^2 = b^2 - x^2 = (2 - x)^2 - x^2 = 4 - 4x$$

Zatem wysokość ostrosłupa:

$$H = \sqrt{4 - 4x} = 2\sqrt{1 - x}, \quad x \in (0; 1)$$

Pole podstawy ostrosłupa:

$$P_p = 6 \cdot \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2$$

Wyznaczamy objętość ostrosłupa jako funkcję zmiennej x:

$$V(x) = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\sqrt{3}}{2}x^2 \cdot 2\sqrt{1 - x} =$$

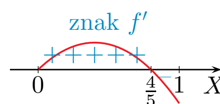
$$= \sqrt{3}\,x^2\sqrt{1 - x} = \sqrt{3x^4 - 3x^5}, \ D_V = (0; 1)$$

Rozpatrzmy funkcję pomocniczą $f(x) = 3x^4 - 3x^5$, $D_f = (0; 1)$.
Funkcja $g(t) = \sqrt{t}$ jest rosnąca, więc funkcje f i V największą wartość przyjmują dla tego samego argumentu.

$$f'(x) = 12x^3 - 15x^4, \ D_{f'} = (0; 1)$$

$$f'(x) = 0 \text{ dla } x = \frac{4}{5}$$

Funkcja f rośnie w przedziale $\left(0; \frac{4}{5}\right\rangle$ oraz maleje w przedziale $\left\langle \frac{4}{5}; 1\right)$, zatem dla $x = \frac{4}{5}$ funkcje f i V przyjmują największe wartości.



Krawędź boczna ma zatem długość: $2 - \frac{4}{5} = \frac{6}{5}$. Obliczamy największą objętość:

$$V\left(\frac{4}{5}\right) = \sqrt{3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 - 3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^5} =$$

$$= \sqrt{3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^4 \left(1 - \frac{4}{5}\right)} = \frac{16}{25}\sqrt{\frac{3}{5}} = \frac{16\sqrt{15}}{125}$$

Odpowiedź: Największą objętość ma ostrosłup o krawędzi podstawy $\frac{4}{5}$ i krawędzi bocznej $\frac{6}{5}$. Objętość tego ostrosłupa jest równa $\frac{16\sqrt{15}}{125}$.



Zadania testowe

Rozwiąż zadania i zapisz odpowiedzi w zeszycie. W każdym zadaniu tylko jedna odpowiedź jest poprawna.

1. Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku 6 cm, a kąt nachylenia przekątnej prostopadłościanu do ściany bocznej ma miarę 30°. Przekątna ta ma długość:

A. $3\sqrt{2}$ cm, **B.** $3\sqrt{3}$ cm, **C.** $6\sqrt{3}$ cm, **D.** 12 cm.

2. Podstawą graniastosłupa prostego jest romb o przekątnych długości 3 i 4. Jeśli przekątna ściany bocznej tego graniastosłupa ma długość $\sqrt{7}$, to jego pole powierzchni całkowitej jest równe:

A. $12\sqrt{3}$, **B.** $12 + 5\sqrt{3}$, **C.** $10 + 4\sqrt{3}$, **D.** 13.

3. Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego czworokątnego ma długość 6, a krawędź boczna tworzy z podstawą kąt 45°. Objętość tego ostrosłupa jest równa:

A. $36\sqrt{2}$, **B.** $48\sqrt{2}$, **C.** $72\sqrt{2}$, **D.** $108\sqrt{2}$.

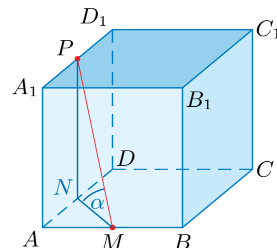
4. Graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy 3 cm przecięto płaszczyzną zawierającą przeciwległe krawędzie jego podstaw. Otrzymany przekrój tworzy z jedną ze ścian bocznych kąt α taki, że $\cos\alpha = 0{,}8$. Pole tego przekroju jest równe:

A. 8 cm^2, **B.** 9 cm^2, **C.** 12 cm^2, **D.** 15 cm^2.

5. W ostrosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy 2 cm pole podstawy jest dwa razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa jest równe:

A. 12 cm^2, **C.** $18\sqrt{3}$ cm^2,
B. 18 cm^2, **D.** $36\sqrt{2}$ cm^2.

6. Punkty M i P są środkami krawędzi sześcianu przedstawionego na rysunku obok. Sinus kąta, który odcinek MP tworzy z podstawą, jest równy:

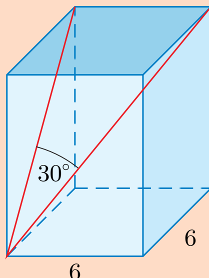


A. $\frac{\sqrt{6}}{3}$, **C.** $\frac{\sqrt{3}}{3}$,
B. $\frac{\sqrt{6}}{4}$, **D.** $\frac{\sqrt{3}}{4}$.

7. Ostrosłup prawidłowy trójkątny, którego ściany boczne są trójkątami prostokątnymi, a pole podstawy jest równe $16\sqrt{3}$ cm^2, przecięto płaszczyzną równoległą do dwóch krawędzi bocznych i przechodzącą przez środek trzeciej. Pole otrzymanego przekroju jest równe:

A. 4 cm^2, **B.** 6 cm^2, **C.** $4\sqrt{3}$ cm^2, **D.** $6\sqrt{3}$ cm^2.

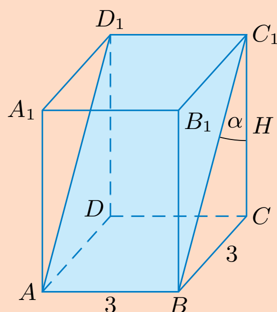
1.



2. $a = 2{,}5$, $H = \frac{\sqrt{3}}{2}$
$P = 2 \cdot \frac{3 \cdot 4}{2} + 4 \cdot 2{,}5 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} =$
$= 12 + 5\sqrt{3}$

3. $H = 3\sqrt{2}$
$V = \frac{1}{3} \cdot 6^2 \cdot 3\sqrt{2} = 36\sqrt{2}$

4.



$|BC_1| = \sqrt{3^2 + H^2}$
$\cos\alpha = \frac{H}{\sqrt{3^2+H^2}} = \frac{4}{5}$,
czyli $H = 4$ cm, stąd
$|BC_1| = 5$ cm
$P = 3 \cdot 5 = 15$ [cm^2]

5. $P_p = 6 \cdot \frac{2^2\sqrt{3}}{4} = 6\sqrt{3}$ [cm^2]
$P_c = P_p + P_b = P_p + 2P_p =$
$= 18\sqrt{3}$ cm^2

6. $|NM| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$
$|PM| = \frac{a\sqrt{6}}{2}$
$\sin\alpha = \frac{|PN|}{|PM|} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

7. Krawędź podstawy: 8 cm
Krawędź ściany bocznej: $4\sqrt{2}$ cm
Przekrój jest trójkątem prostokątnym o bokach długości $2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}$ i 4.
$P = \frac{1}{2} \cdot (2\sqrt{2})^2 = 4$ [cm^2]



Zadania krótkiej odpowiedzi

Zadanie 1 (2 pkt)
Sześcian o krawędzi 4 cm i graniastosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy $2\sqrt{2}$ cm mają taką samą objętość. Oblicz długość przekątnej graniastosłupa.

Zadanie 2 (2 pkt)
Wysokość ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest dwa razy dłuższa od krawędzi jego podstawy. Oblicz tangens kąta nachylenia ściany bocznej tego ostrosłupa do jego podstawy.

Zadanie 3 (2 pkt)
Ściany boczne ostrosłupa prawidłowego trójkątnego są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych długości 2 cm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Zadania rozszerzonej odpowiedzi

Zadanie 4 (4 pkt)
Wysokość graniastosłupa prostego jest równa 12 cm, a przekątna ściany bocznej ma długość 15 cm. Jego podstawą jest romb o kącie ostrym 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 5 (4 pkt)
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym o krawędzi podstawy równej 4 przekątna tworzy z tą krawędzią kąt 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 6 (4 pkt)
Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 6 cm, a pole podstawy jest cztery razy mniejsze od pola powierzchni bocznej. Oblicz objętość tego ostrosłupa.

Zadanie 7 (4 pkt)
Oblicz objętość ostrosłupa prawidłowego trójkątnego, w którym wysokość ściany bocznej jest równa 10 cm i tworzy z podstawą kąt 45°.

Zadanie 8 (4 pkt)
Podstawą ostrosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 12 cm, a jeden z kątów ostrych ma miarę 60°. Wysokość ostrosłupa jest równa 8 cm, a spodkiem wysokości jest środek okręgu opisanego na podstawie. Oblicz pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa.

Odpowiedzi do zadań

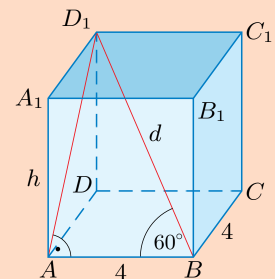
1. H – wysokość graniastosłupa
d_p – długość przekątnej podstawy graniastosłupa
d – długość przekątnej graniastosłupa
$4^3 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot H$, $H = 8$ cm
$d_p = 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$ [cm]
$d^2 = 4^2 + 8^2 = 80$
Zatem $d = 4\sqrt{5}$ cm.

2. 4

3. Długość krawędzi podstawy: $2\sqrt{2}$ cm
$P_c = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^2 \cdot \sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2^2 =$
$= 2\left(\sqrt{3} + 3\right)$ [cm²]

4. Długość krawędzi podstawy: 9 cm
$V = 9^2 \sin 60^\circ \cdot 12 =$
$= 486\sqrt{3}$ [cm³]

5.

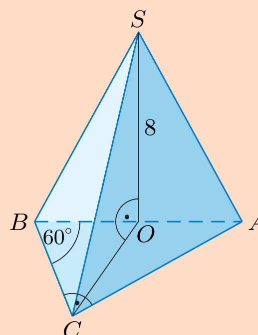


$\frac{|AD_1|}{4} = \operatorname{tg} 60^\circ = \sqrt{3}$
$|AD_1| = 4\sqrt{3}$
Dla trójkąta AD_1D:
$h^2 = \left(4\sqrt{3}\right)^2 - 4^2 = 32$
$h = 4\sqrt{2}$
$V = 4^2 \cdot 4\sqrt{2} = 64\sqrt{2}$

6. h – wysokość ściany bocznej
H – wysokość ostrosłupa
$4 \cdot 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6h$,
czyli $h = 12\sqrt{3}$ cm
$H = \sqrt{(12\sqrt{3})^2 - \left(\frac{6\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$
$= 9\sqrt{5}$ [cm]
$V = \frac{1}{3} \cdot 6 \cdot \frac{6^2\sqrt{3}}{4} \cdot 9\sqrt{5} =$
$= 162\sqrt{15}$ [cm³]

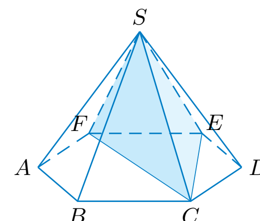
7. a – krawędź podstawy
H – wysokość ostrosłupa
$H = 5\sqrt{2}$ cm
$\frac{1}{3} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{2}$,
czyli $a = 10\sqrt{6}$ cm
$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(10\sqrt{6})^2\sqrt{3}}{4} \cdot 5\sqrt{2} =$
$= 250\sqrt{6}$ [cm³]

8. $|BO| = |OA| = |OC| = 6$ cm
$|CA| = 6\sqrt{3}$ cm, $|CB| = 6$ cm
$|AS| = |BS| = |CS| = 10$ cm
Ściany boczne są trójkątami równoramiennymi o wysokościach:
$h_{ABS} = 8$ cm, $h_{CAS} = \sqrt{73}$ cm, $h_{CBS} = \sqrt{91}$ cm
$P = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 8 + \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot \sqrt{73} + \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot \sqrt{91} =$
$= 3(16 + \sqrt{219} + \sqrt{91})$ [cm²]



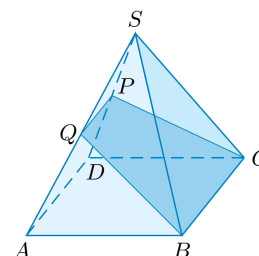
Zadanie 1 (2 pkt)
Wysokość graniastosłupa prawidłowego trójkątnego jest równa 2, a kąt między przekątną ściany bocznej a podstawą ma miarę 60°. Oblicz pole powierzchni bocznej tego graniastosłupa.

Zadanie 2 (2 pkt)
Krawędź podstawy ostrosłupa prawidłowego sześciokątnego ma długość 4, a krawędź boczna – długość 6. Oblicz stosunek pola trójkąta CFS do pola trójkąta CES (rysunek obok).



Zadanie 3 (4 pkt)
Podstawa graniastosłupa prawidłowego czworokątnego ma pole równe 50 cm^2. Przekrój tego graniastosłupa płaszczyzną przechodzącą przez przekątną dolnej podstawy i jeden z wierzchołków górnej podstawy jest trójkątem o polu równym 65 cm^2. Oblicz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 4 (5 pkt)
Ostrosłup prawidłowy czworokątny przecięto płaszczyzną $BCPQ$, która tworzy równe kąty z płaszczyznami $ABCD$ i BCS (rysunek obok). Oblicz miarę kąta nachylenia ściany bocznej do podstawy, jeśli wiadomo, że płaszczyzna $BCPQ$ podzieliła powierzchnię boczną tego ostrosłupa na dwie części o równych polach.



Zadanie 5 (5 pkt)
Ostrosłup prawidłowy czworokątny o krawędzi podstawy a i wysokości h przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki dwóch sąsiednich krawędzi podstawy i środek wysokości ostrosłupa. Wyznacz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 6 (5 pkt)
Ostrosłup prawidłowy trójkątny o krawędzi podstawy a i kącie płaskim przy wierzchołku α przecięto płaszczyzną zawierającą wysokości dwóch ścian bocznych wychodzące z wierzchołka ostrosłupa. Wyznacz pole tego przekroju.

Zadanie 7 (5 pkt)
Suma długości wszystkich krawędzi ostrosłupa prawidłowego czworokątnego jest równa 60. Dla jakich długości krawędzi ostrosłup ten będzie miał największą objętość?

Zadanie 8 (5 pkt)
Suma długości krawędzi graniastosłupa prawidłowego trójkątnego wychodzących z jednego wierzchołka jest równa P. Jaką największą objętość może mieć taki graniastosłup?

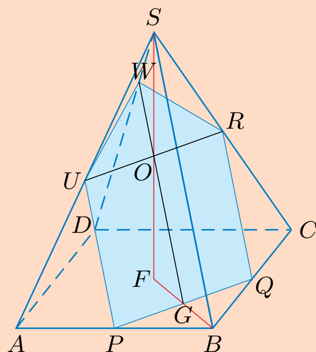
1. $4\sqrt{3}$

2. $\frac{\sqrt{10}}{3}$

3. 600 cm^3

4. 45°

5.



Odcinek GO łączy środki boków trójkąta BFS, więc jest równoległy do krawędzi BS. Zatem przekrój $PQRWU$ jest również równoległy do krawędzi BS.

Czworokąt $PQRU$ jest prostokątem o bokach:
$|PQ| = |UR| = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ oraz
$|PU| = \frac{1}{2}|BS| = \frac{1}{2}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$,
a jego pole wynosi:
$P_1 = \frac{a\sqrt{2}}{4}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$
$|WO| = \frac{1}{4}|BS| = \frac{1}{4}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$
Pole trójkąta URW:
$P_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}} =$
$= \frac{a\sqrt{2}}{16}\sqrt{h^2 + \frac{a^2}{2}}$
Pole całego przekroju:
$P = P_1 + P_2 =$
$= \frac{a\sqrt{a^2+2h^2}}{4} + \frac{a\sqrt{a^2+2h^2}}{16} =$
$= \frac{5a}{16}\sqrt{a^2 + 2h^2}$

6. $\frac{1}{16}a^2\sqrt{4\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2} - 1}$

8. $\frac{P^3\sqrt{3}}{108}$

7. a – krawędź podstawy
b – krawędź ściany bocznej
H – wysokość ostrosłupa
$4a + 4b = 60$, czyli $b = 15 - a$, gdzie $a \in (0; 15)$
$H = \sqrt{b^2 - \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{225 - 30a + \frac{a^2}{2}}$, gdzie $a \in (0; 30 - 15\sqrt{2})$
$V(a) = \frac{1}{3}a^2\sqrt{225 - 30a + \frac{a^2}{2}} = \sqrt{25a^4 - \frac{10}{3}a^5 + \frac{1}{18}a^6}$, $a \in (0; 30 - 15\sqrt{2})$
Wprowadzamy funkcję pomocniczą: $f(a) = 25a^4 - \frac{10}{3}a^5 + \frac{1}{18}a^6$.
$f'(a) = 100a^3 - \frac{50}{3}a^4 + \frac{1}{3}a^5$, $a \in (0; 30 - 15\sqrt{2})$
$f'(a) = 0$ dla $a = 5(5 - \sqrt{13})$
$b = 5(\sqrt{13} - 2)$